В древней Руси уже были известны проекционные способы изображений. Об этом свидетельствует изучение иллюстраций к летописям, а также старинных документов и рисунков, применявшихся при создании планов угодий и городов. Дошедшие до нас изображения Пскова (1581) и план Московского Кремля (1606) представляют собой «вольную перспективу», близкую к фронтальной аксонометрической проекции.

Чертежи выдающегося зодчего Д. В. Ухтомского (1719-1774) были выполнены в точной проекционной связи ортогональных проекций - плана и фасада, т.е. задолго до появления работ Г. Монжа. Архитектурные проекты В. И. Баженова, М. Ф. Казакова, И. Е. Старова свидетельствуют о том, что в России второй половины 18 в. архитекторы свободно владели ортогональными и аксонометрическими проекциями.

Впервые курс начертательной геометрии начал читаться в Петербургском институте (корпусе) инженеров путей сообщения в 1810 г. Учеником Г. Монжа французским инженером К. И. Потье. Позднее курс начертательной геометрии, изданный Потье, был переведен на русский язык Я. А. Севастьяновым. В 1821 г. был издан оригинальный труд проф. Я. А. Севастьянова «Основания начертательной геометрии». Он выгодно отличается от курса Потье не только терминологией, которая сохранилась до настоящего времени, но и обстоятельным изложением теоретических вопросов. Построение курса, предложенное Я. А. Севастьяновым, оставалось неизменным вплоть до выхода в свет в 1870 г. «Полного курса начертательной геометрии» проф. Н. И. Макарова. В 1883 г. вышел его подробный курс «Перспектива» с большим числом практических примеров.

Классическим учебником является «Курс начертательной геометрии» (1895) проф. В. И. Курдюмова. Помимо этого курса им написан ряд трудов, в которых содержатся систематические сведения по всем видам изображений. Значительными успехами начертательной геометрия обязана трудам замечательных советских ученых Н. Ф. Четверухина, М. Я. Громова, С. М.Колотова, Д. И. Каргина, И. И.Котова. В вузах страны были организованы специальные кафедры, созданы научно-методические советы и специализированные советы по защите диссертаций.

В настоящий время большую научную и педагогическую работу ведут многие коллективы кафедр, руководимые видными учеными, которые вносят большой вклад в углубление отдельных направлений начертательной геометрии.

К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕНОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Гребенникова И. В., Кремлёв А. Г.
Уральский государственный университет

В данной работе рассматривается задача оптимального управления по минимаксному критерию в постановке [Красовский 1968: 1], [Куржанский 1977: 4] динамическими объектами, математическими моделями которых являются сингулярно возмущенные системы (с малым параметром $\mu>0$ при части производных) с запаздыванием $h>0$ (по состоянию) следующего вида:

$$\begin{aligned} &dx(t)/dt = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + G_1(t)x(t-h) + B_1(t)u(t),\\ &\mu dy(t)/dt = A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t) + G_2(t)x(t-h)\ B_2(t)u(t), \end{aligned} \qquad (1)$$

где $t_0 \le t \le t_1$, $x\in R^n$, $y\in R^m$, $u\in R^r$. Начальное состояние системы $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$, $x(t)=\psi(t)$, $t_0-h\le t<t_0$ точно неизвестно и заданы лишь ограничения $x_0\in X_0$, $y_0\in Y_0$, где X_0, Y_0 - выпуклые компакты в соответствующих пространствах, $\psi(t)\in\Psi(t)$, $t_0-h\le t<t_0$, $\Psi(t)$ - заданное выпуклое многозначное отображение (со значениями в виде выпуклых компактов в R^n), непрерывное по t (в метрике Хаусдорфа). Реализации $u(t)$, $t\in T$ - измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие геометрическим ограничениям $P=\{u(\cdot) \mid u(t)\in P(t),\ t\in T\}$, где $P(t)$ - заданное выпуклое многозначное отображение, непрерывное по t. Предполагается, что выполнено условие экспоненциальной устойчивости для подсистемы быстрых переменных.

Задача 1. Среди управлений $u(\cdot)\in P$ найти оптимальное $u^0=u^0(\cdot)$, доставляющее минимум функционалу $J(u(\cdot))$ на множестве P:

$$\varepsilon^0(t_1) = J(u^0) = \min_{u(\cdot)\in P} J(u(\cdot));\quad J(u(\cdot)) = \max_{z_0\in Z_0}\ \max_{\psi(\cdot)\in\Psi(\cdot)} \varphi(z(t_1;u(\cdot),z_0,\psi(\cdot))),$$

где $\varphi(\cdot):R^{n+m}\to R$ заданная выпуклая функция (с конечными значениями), $z(t,u(\cdot),z_0,\psi(\cdot))$ - решение (1) при $z(t_0)=z_0=(x_0,y_0)\in Z_0=X_0\times Y_0$ при некотором $\psi(\cdot)\in\Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot)\in P$.

Решение задачи 1 - $u^0(\cdot,\mu)$, $\varepsilon^0(t_1)$ зависит от параметра μ. Однако эти величины при $\mu\to+0$ могут не сходиться к соответствующим решениям задачи 1 для вырожденной системы (полученной при $\mu=0$). Поэтому важным представляется построение аппроксимации оптимального управления $u^0(\cdot,\mu)$, доставляющей оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1)=J(u^0(\cdot,\mu))$ с заданной точностью (относительно μ).

Следующую задачу будем называть *предельной* [Кремлёв 1993: 2].

Задача 2. Среди управлений $u(\tau)\in P(\tau)$, $\tau\in T$, $v(s)\in P(t_1)$, $s\geq 0$ найти $u^{(0)}=u^{(0)}(\cdot)$, $v^{(0)}=v^{(0)}(\cdot)$, доставляющие минимум функционалу $J^{(0)}$ на множестве P:

$$J^{(0)}(u^{(0)},v^{(0)})=\min\{J^{(0)}(u(\cdot),v(\cdot))\mid u(\cdot)\in P(\cdot),v(\cdot)\in P(t_1)\};$$

$$J^{(0)}(u(\cdot),v(\cdot))=\max\{\varphi(\tilde z(t_1;u(\cdot),v(\cdot),x_0,\psi(\cdot)))\mid x_0\in X_0,\psi(\cdot)\in\Psi(\cdot)\},\tag{2}$$

$$\tilde z(t_1;u(\cdot),v(\cdot),x_0,\psi(\cdot))=\left(x_0'(t_1);\,y_0'(t_1)+\tilde y_{t_1}'(0)\right)',$$

где $x_0(\cdot)=x_0(\cdot;u(\cdot),x_0,\psi(\cdot))$, - решение вырожденной системы (полученной из (1) при $\mu=0$)

$$\mathrm{dx(t)/dt=A_0}(t)\,\mathrm{x(t)+G_0(t)\,x(t\text{-}h)+B_0(t)\,u(t)},\tag{3}$$

$$\mathrm{y(t)=-A_{22}^{-1}(t)\,A_{21}x(t)-A_{22}^{-1}(t)\,G_2(t)\,x(t\text{-}h)-A_{22}^{-1}(t)\,B_2(t)\,u(t)},\tag{4}$$

где $t\in T$, $\mathrm{A_0(t)=A_{11}(t)-A_{12}(t)\,A_{22}^{-1}(t)\,A_{21}(t)}$,

$\mathrm{G_0(t)=G_1(t)-A_{12}(t)\,A_{22}^{-1}(t)\,G_2(t)}$,

$\mathrm{B_0(t)=B_1(t)-A_{12}(t)\,A_{22}^{-1}(t)\,B_2(t)}$; $\tilde y_{t_1}(s)$, $s\geq 0$ - ограниченное решение дифференциального уравнения ($y\in R^m$): $d\tilde y_{t_1}/ds=-A_{22}(t_1)\tilde y_{t_1}-B_2(t_1)(v-u(t_1))$,

Причем $\lim\limits_{s\to+\infty}\Phi_0[t_1,s]\tilde y_{t_1}(s)=0.$

Рассмотрим управляющее воздействие $u_\mu^{(0)}(\cdot)$:

$$u_\mu^{(0)}(\tau)=\begin{cases}u^{(0)}(\tau), & t_0\leq\tau\leq t_1-\alpha(\mu),\\ v^{(0)}((t_1-\tau)/\mu), & t_1-\alpha(\mu)<\tau\leq t_1,\end{cases}\tag{5}$$

где $u^{(0)}(\cdot)$, $v^{(0)}(\cdot)$ определяются условиями: для почти всех $\tau\in[t_0,t_1]$

$$w'(\tau,p^{(0)},q^{(0)})B_0(\tau)u^{(0)}(\tau)=\min_{u(\tau)\in P(\tau)}w'(\tau,p^{(0)},q^{(0)})B_0(\tau)u(\tau);\tag{6}$$

для почти всех $s\geq 0$

$$q^{(0)\prime}\Phi_0[t_1,s]B_2(t_1)v^{(0)}(s)=\min_{v(s)\in P(t_1)}q^{(0)\prime}\Phi_0[t_1,s]B_2(t_1)v(s).\tag{7}$$

Вектор $l^{(0)}=(p^{(0)\prime},q^{(0)\prime})'$ доставляет максимум

$$\varepsilon^{(0)}(t_1)=\max\{\chi^{(0)}(p,q)\mid p\in R^n,q\in R^m\}=\chi^{(0)}(p^{(0)},q^{(0)}).\tag{8}$$

$$\chi^{(0)}(p,q)=-h_0^{**}(p,q)-\int_{t_0}^{t_1}\rho(-w'(\tau,p,q)B_0(\tau)\mid P(\tau))d\tau-$$

$$-\int_0^\infty\rho(-q'\Phi_0[t_1,s]B_2(t_1)\mid P(t_1))ds,$$

где обозначены: $\varphi^*(l)$ - функция, сопряженная к $\varphi(z)$; $h^{**}(l)=\overline{(co\,h)}(l)$ - замыкание выпуклой оболочки функции $h(l)$; $\rho(s\mid X)$ - опорная функция множества X на элементе s; $\Phi_0[t_1,s]=\exp(A_{22}(t_1)s)$ - фундаментальная матрица решений уравнения $dy(t)/dt=A_{22}(t_1)y(t)$, $\Phi_0[t_1,0]=E_m$;

$$h_0(p,q)=\varphi^*(p,q)-\rho(w'(t_0,p,q)\,|\,X_0)-\int_{t_0}^{t_0+h}\rho(w'(\tau,p,q)G_0(\tau)\,|\,\Psi(t_1-\tau))d\tau,$$

$$w'(\tau,p,q)=s'(t_1,p,q)X[t_1,\tau]-q'A_{22}^{-1}(t_1)G_2(t_1)X[t_1-h,\tau];\ s'(t_1,p,q)=p'-q'A_{22}^{-1}(t_1)A_{21}(t_1).$$

$X[t,\tau]$ есть фундаментальная матрица решений системы (3) (при $u\equiv0$), причем $X[\tau,\tau]=E_n$, $X[t,\tau]=0$ при $\tau>t$.

Теорема 1 [Кремлёв, Гребенникова 2006: 3]. При $0<\mu\le\mu_0$, μ_0 достаточно мало, справедливо $\varepsilon^0(t_1)=\varepsilon^{(0)}(t_1)+o(1)$.

Предположение 1. (i) Система (3) относительно управляема на T.

(ii) Для любого $t\in T$ $rank\{B_2(t), A_{22}(t)B_2(t),..., A_{22}^{m-1}(t)B_2(t)\}=m.$

(iii) Максимум в (8) достигается на векторе $l^{(0)}=(p^{(0)\prime},q^{(0)\prime})'$ таком, что $s'(t_1;p^{(0)},q^{(0)})\neq0, q^{(0)}\neq0.$

Следует заметить, что в условиях предположения 1 задача 1 разрешима, вектор $l^{0\prime}=(p^{0\prime},q^{0\prime})$, максимизирующий (8), отличен от нулевого.

Теорема 2. Пусть выполнено предположение 1. Тогда при $0<\mu\le\mu_0$, μ_0 достаточно мало, справедливо равенство

$\varepsilon^0(t_1)=J(u^0(\cdot))=J(u_\mu^{(0)}(\cdot))+o(1).$

Теорема 3. Пусть выполнено предположение 1. Тогда задача 2 разрешима, причем $u^{(0)}$, $v^{(0)}$ удовлетворяют условиям минимума (6), (7) и доставляют функционалу $J^{(0)}$ (2) значение $J^{(0)}(u^{(0)},v^{(0)})=\varepsilon^{(0)}(t_1).$

Проиллюстрируем полученные результаты на следующем примере. Пусть исходная управляемая система с запаздыванием описывается уравнениями:

$\dot{x}(t)=x(t)+y_1(t)+x(t-h)+(0.5t-0.08)u(t),$

$\mu\dot{y}_1(t)=-2x(t)-y_1(t)-2x(t-h)+0.5tu(t),$

$\mu\dot{y}_2(t)=-2y_2(t)+tu(t),$

где $t_0\le t\le t_1$, $\mu=0.001$, $h=0.1$, $t_0=0$, $t_1=t_0+2.6h$; $x(t)\equiv0$, при $t_0-h\le t<t_0$, $x(t_0)=x_0$, $x_0\in X_0$, $y(t_0)=y_0$, $y_0\in Y_0$; X_0 - отрезок $|x_0-d|\le r_0$, $d=0, r_0=1$, $x_0\in R$, Y_0 - круг $\|y_0-c\|\le r_1$, $c=(c_1,c_2)=(0,0), r_1=3$, $y_0\in R^2$; u(t) удовлетворяют ограничению $|u(t)|\le\lambda$, $\lambda=5$, $t_0\le t\le t_1$; целевая функция $\varphi(z)=\|z\|$, $z=(x,y_1,y_2)$.

Прежде всего, рассмотрим *вырожденную* задачу для системы (3), (4) (полученной при $\mu=0$):

$\dot{x}(t)=-x(t)-x(t-h)+(t-0.08)u(t),$

$y_1(t)=-2x(t)-2x(t-h)+0.5tu(t),$

$y_2(t)=0.5tu(t).$

Фундаментальная матрица $X[t,\tau]$ находится по шагам:

1) $X[t,\tau]=e^{-(t-\tau)}$, при $t_0\le t-\tau\le t_0+h,$

2) $X[t,\tau]=e^{-(t-\tau)}-(t-\tau-h)e^{-(t-\tau-h)}$, при $t_0+h\le t-\tau\le t_0+2h,$

3) при $t_0+2h\le t-\tau\le t_1\le t_0+3h,$ получим

$X[t,\tau]=e^{-(t-\tau)}-(t-\tau-h)e^{-(t-\tau-h)}+0.5(t-\tau-2h)^2e^{-(t-\tau-2h)}.$

Решение вырожденной задачи описывается следующими соотношениями:

$\varepsilon_0(t_1)=\max\{\chi_0(l)\,|\,ll'=1\}=\chi_0(l_0),\ \ l=(p,q), q=(q_1,q_2), l_0=(p_0,q_0),$

$$\chi_0(p,q)=-h_0^{**}(p,q)-\int_{t_0}^{t_1}\rho(-w'(\tau,p,q)B_0(\tau)\,|\,P(\tau))d\tau-\rho(q'A_{22}^{-1}(t_1)B_2(t_1)\,|\,P(t_1)).$$

Следовательно, имеем

$$\chi_0(p,q_1,q_2)=\left|(p-2q_1)X[t_1,t_0]-2q_1X[t_1-h,t_0]\right|(|d|+r_0)-$$
$$-\lambda\left[\int_{t_0}^{t_1}\left|((p-2q_1)X[t_1,t_0]-2q_1X[t_1-h,t_0])(\tau-0.08)\right|d\tau+\left|q_1 0.5t_1+q_2 0.5t_1\right|\right].$$

Оптимальное управление $u_0(\cdot)$ для вырожденной задачи есть

$$u_0(\tau)=\begin{cases}-\lambda sgn(((p_0-2q_{1_0})X[t_1,t_0]-2q_{1_0}X[t_1-h,t_0])(\tau-0.08)), t_0\le\tau<t_1,\\ -\lambda\,\mathrm{sgn}(q_{1_0}0.5t_1+q_{2_0}0.5t_1),\ \tau=t_1.\end{cases}$$

Максимизирующий вектор l_0 получен при компьютерном моделировании с шагом Δl= 0.1:
$l_0=(-0.3, 0.9, 0.316),\ \ \varepsilon_0(t_1)=2.155.$

Далее рассмотрим *предельную* задачу 2. В соответствии с (6)-(8) получим,

$$\chi^{(0)}(p,q_1,q_2)=\left|(p-2q_1)X[t_1,t_0]-2q_1X[t_1-h,t_0]\right|(|d|+r_0)-$$
$$-\lambda\left[\int_{t_0}^{t_1}\left|((p-2q_1)X[t_1,t_0]-2q_1X[t_1-h,t_0])(\tau-0.08)\right|d\tau+\left|q_1 0.5t_1+q_2 0.5t_1+q_1^2t_1/(4q_2)\right|\right].$$

Управление $u_\mu^{(0)}(\cdot)$ (5) имеет вид:

$$u_\mu^{(0)}(\tau)=\begin{cases}u^{(0)}(\tau), & t_0\le\tau\le t_1-\alpha(\mu),\\ v^{(0)}((t_1-\tau)/\mu), & t_1-\alpha(\mu)<\tau\le t_1,\end{cases}$$

$$u^{(0)}(\tau)=-\lambda sgn(((p^{(0)}-2q_1^{(0)})X[t_1,t_0]-2q_1^{(0)}X[t_1-h,t_0])(\tau-0.08)), t_0\le\tau<t_1-\alpha(\mu),$$

$v^{(0)}(s)=-\lambda\,\mathrm{sgn}(q_1^{(0)}0.5t_1+q_2^{(0)}e^{-s}t_1), s\ge 0.$ В качестве $\alpha(\mu)$ можно взять $\alpha(\mu)=\sqrt{\mu}$.

В результате компьютерного моделирования получим максимизирующий вектор $l^{(0)}=(-0.2, 0.9, -0.387),$ значение функционала $\varepsilon^{(0)}(t_1)=2.133.$

Сравнивая между собой величины $\varepsilon_0(t_1),\ \varepsilon^{(0)}(t_1)$, имеем $\varepsilon^{(0)}(t_1)<\varepsilon_0(t_1)$.

Таким образом, данный пример подтверждает теоретические выводы: предельное управление $u^{(0)}(\cdot)$ не дает даже нулевого приближения значению $\varepsilon^0(t_1)$ при $0<\mu\le\mu_0$, не совпадает с решением $u_0(\cdot)$ вырожденной задачи, которое в свою очередь дает худший результат для исходной системы по сравнению с $u_\mu^{(0)}(\cdot)$. Указанные векторы $l_0,\ l^{(0)}$ показывают несовпадение решений вырожденной и предельной задач.

Список использованной литературы

1. **Красовский Н. Н.** Теория управления движением. - М.: Наука, 1968.
2. **Кремлёв А. Г.** Асимптотические свойства ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы в задаче оптимального управления // АиТ. - 1993. - № 9. - С. 61-78.
3. **Кремлёв А. Г., Гребенникова И. В.** Об асимптотике оптимального управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием // Математика. Информационные технологии. Образование: Материалы научно-практ. конференции. - Оренбург: ГОУ ОГУ, 2006. - Ч. 1. - С. 36-38.
4. **Куржанский А. Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. - М.: Наука, 1977.

О МЕХАНИЗМЕ РОЖДЕНИЯ ПИОНОВ ПРОТОНАМИ НА ЯДРАХ ВБЛИЗИ ПОРОГА

Дьяченко А. Т., Барышников В. Н.
Петербургский государственный университет путей сообщения
Санкт-петербургский государственный университет

В настоящей работе предложено при расчете сечения процесса $p+N\to N+N+\pi$ включить в рассмотрение процесс образования и поглощения пионов через образование Δ - резонанса. Учитывая энергетическую зависимость ширины Δ - резонанса, в сечение рождения π^0,π^+ - мезонов включен вклад дейтронного канала пионорождения.