

Кобельский В. Л., Степанова М. А.

**ВЫЧИСЛЕНИЕ РОДА ГАУССОВОЙ ДИАГРАММЫ КРИВОЙ**

Адрес статьи: [www.gramota.net/materials/1/2008/12/20.html](http://www.gramota.net/materials/1/2008/12/20.html)

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по данному вопросу.

Источник

**Альманах современной науки и образования**

Тамбов: Грамота, 2008. № 12 (19). С. 73-77. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: [www.gramota.net/editions/1.html](http://www.gramota.net/editions/1.html)

Содержание данного номера журнала: [www.gramota.net/materials/1/2008/12/](http://www.gramota.net/materials/1/2008/12/)

**© Издательство "Грамота"**

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: [www.gramota.net](http://www.gramota.net)

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: [almanac@gramota.net](mailto:almanac@gramota.net)

Для конструирования тестовых заданий широко используется невербальный способ предъявления информации. Это активизирует умственную деятельность испытуемого, вынуждает его выполнять перекодировку информации, и, соответственно, лучше и глубже усваивать ее.

Например, векторная диаграмма, создается непосредственно в момент предъявления тестового задания. Для этой диаграммы вычисляется правильный (эталонный) ответ. Далее программа переходит в режим ожидания реакции испытуемого. После ввода ответа испытуемым производится сравнение ответа с эталоном. Если различие менее 10%, то ответ считается правильным.

Далее количество графической информации увеличивается - добавляются принципиальные схемы электрических цепей. Испытуемый сопоставляет приведенные принципиальные схемы с векторной диаграммой и выбирает соответствующую схему. Далее выполняет нужные отсчеты по осям координат в заданном масштабе и вычисляет ответ на поставленный вопрос.

На следующем этапе графическая информация (невербальная составляющая) представлена в виде «фотографии» с изображением измерительной установки. В этом случае испытуемому необходимо по изображению на экране монитора составить сначала принципиальную схему цепи и только потом, выполнять необходимые расчеты. Испытуемые быстро убеждаются, что прямые попытки выполнения расчетов без промежуточного построения принципиальной схемы - прямо по фотографии - чрезвычайно трудны и способствуют появлению большого количества ошибок. Далее, наблюдая показания измерительных приборов на изображении, испытуемый получает все необходимые исходные данные для расчетов. В данном примере компьютерное моделирование используется для определения положения стрелок измерительных приборов.

При повторном прохождении теста стрелки приборов будут установлены в другие положения, что определяется процедурой рандомизации исходных данных. Отметим, что используются не любые значения генератора случайных чисел, а только те, которые удовлетворяют области допустимых значений вычисляемых функций.

Использование программного средства «ELECTRO» показало, что заметно сокращается время формирования умения обучаемых работе с реальными измерительными установками.

Таким образом, псевдотренажеры описанного типа обладают несомненным дидактическим потенциалом и могут с успехом использоваться на лабораторно-практических занятиях.

#### Список использованной литературы

1. Бурсиан Э. В. Задачи по физике для компьютера: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. - М.: Просвещение, 1991. - 256 с.
2. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2-х частях / Пер. с англ. - М.: Мир, 1990. - Ч. 1. - 349 с.
3. Ким В. С. Применение компьютерного моделирования в преподавании физики // Материалы конференции «Модели прогрессивного развития Дальневосточного региона». - Уссурийск: Изд. УГПИ, 1999. - С. 66-67.
4. Ким В. С. Тестирование учебных достижений: Монография. - Уссурийск: Изд. УГПИ, 2007. - 214 с.

## ВЫЧИСЛЕНИЕ РОДА ГАУССОВОЙ ДИАГРАММЫ КРИВОЙ

Кобельский В. Л., Степанова М. А.

Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена

### 1. Введение

Пусть  $X$  - ориентированная замкнутая поверхность  $F_g$  рода  $g$  или плоскость  $R^2$ . Общим погружением окружности  $S^1$  в поверхность  $X$  будем называть гладкое погружение общего положения. Кривой на поверхности  $X$  будем называть образ общего погружения окружности  $S^1$  в поверхность  $X$ . Двойной точкой кривой на поверхности будем называть точку кривой, прообраз которой состоит ровно из двух точек.

Для кривой на ориентированной поверхности (или плоской кривой) можно построить так называемую гауссову диаграмму кривой, которая представляет собой окружность  $S^1$ , на которой отмечены прообразы двойных точек и каждая пара точек - прообразов одной двойной точки кривой - соединена ориентированной хордой (см. п. 2; если у кривой  $n$  двойных точек, то ее гауссова диаграмма - это окружность с  $n$  ориентированными хордами,  $n \in \mathbb{N}$ ). Можно говорить о гауссовой диаграмме и безотносительно к какой-либо кривой, как об окружности  $S^1$  с конечным числом ориентированных хорд. Если гауссова диаграмма  $G$  является гауссовой диаграммой некоторой кривой на поверхности  $F_g$  (ориентированной замкнутой поверхности рода  $g$ ), то говорят, что диаграмма  $G$  реализуется на поверхности  $F_g$  (а кривая является реализацией диаграммы  $G$ ). Ясно, что если Гауссову диаграмму можно реализовать на поверхности рода  $g$ , то ее можно реализовать и на поверхности большего рода. Минимальное неотрицательное число  $g$ , такое, что  $G$  реализуется на ориентированной замкнутой поверхности рода  $g$  называется родом гауссовой диаграммы  $G$  (см. теорема 3.2).

В [J. Scott Carter 1991: 1] указан способ построения поверхности минимального рода по данной Гауссовой диаграмме, но без вычисления ее рода. В данной статье мы представляем алгоритм вычисления рода гауссовой диаграммы по самой диаграмме.

Пусть  $G$  - гауссова диаграмма,  $k$  - кривая на ориентированной замкнутой поверхности  $F_g$  такая, что  $G$  - диаграмма этой кривой и  $g$  - род диаграммы  $G$ . По диаграмме  $G$  строится матрица  $I(k)$ , которая является

матрицей индексов пересечений в некотором порождающем множестве для группы  $H_1(F_g; \mathbb{Z})$ . Основным результатом работы является следующая теорема:

**1.1. Теорема.**  $g = \frac{1}{2} \text{Rang } I(k)$

**2. Гауссова диаграмма кривой**

(см., например, [S. С. Chmutov, S. V. Duzhin 1997: 2], [M. Polyak 1994: 3]).

Пусть  $f: S^1 \rightarrow X$  - общее погружение,  $k = f(S^1)$  - кривая на поверхности  $X$ . Пусть  $t_1, t_2, \dots, t_n$  - двойные точки кривой  $k$  ( $n \in \mathbb{N}$  - число двойных точек кривой  $k$ ).

Построим гауссову диаграмму кривой  $k$  по следующему алгоритму:

- 1) Ориентируем кривую  $k$ .
- 2) На окружности отметим прообразы двойных точек:  $f^{-1}(t_i) = \{t_i^1, t_i^2\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) (Рис. 1a).
- 3) Точки  $t_i^1$  и  $t_i^2$  соединим хордой (Рис. 1b).
- 4) Зададим ориентацию каждой хорды по следующему правилу:

$D_i$  - окрестность точки  $t_i$ , не содержащая других двойных точек кривой  $k$ . Прообраз окрестности  $D_i$  - два открытых интервала на окружности:

$f^{-1}(D_i) = \{u_i^1, u_i^2\}$ , при этом  $t_i^1 \in u_i^1, t_i^2 \in u_i^2$ . Отметим касательные векторы  $\tau_j$  ( $j = 1, 2$ ) в точке  $t_i$  к кривой:  $\tau_j$  - касательный вектор к ветке  $f(u_i^j)$ . Если ориентация пары векторов  $(\tau_1, \tau_2)$  совпадает с ориентацией поверхности  $X$ , то точке  $t_i^2$  припишем знак (-1), точке  $t_i^1$  - знак (+1), в противном случае, наоборот, точке  $t_i^2$  припишем знак (+1), точке  $t_i^1$  - знак (-1). Ориентируем хорду  $[t_i^1 t_i^2]$  от точки со знаком (-1) к точке со знаком (+1).

Итак, гауссова диаграмма кривой с  $n$  двойными точками - это ориентированная окружность с  $n$  ориентированными хордами (началу каждой ориентированной хорды приписан знак (-1), концу - (+1)).

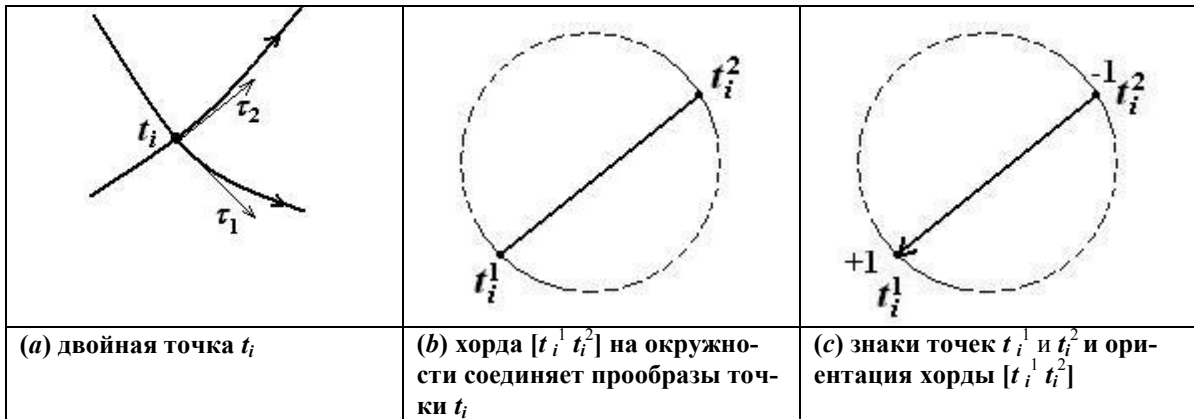


Рис. 1

**2.1. Пример.** На Рис. 2 изображена кривая (a) и ее гауссова диаграмма (b).

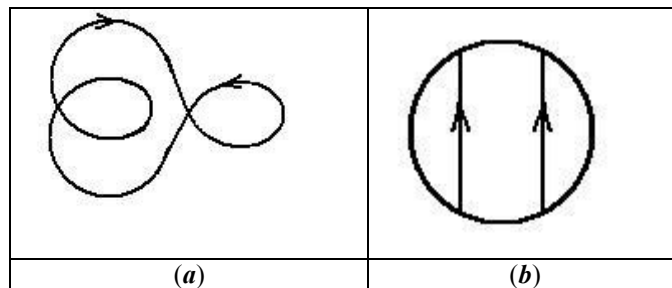


Рис. 2

**2.2. Замечания.** (1) При смене ориентации кривой направление стрелок на гауссовой диаграмме не изменится.

(2) При смене ориентации поверхности  $X$  все стрелки на гауссовой диаграмме поменяют направление.

Можно рассматривать гауссовы диаграммы безотносительно к какой-либо кривой. Гауссовой диаграммой порядка  $n$  называется ориентированная окружность с  $n$  ориентированными хордами.

**3. Род гауссовой диаграммы**

Реализацией гауссовой диаграммы  $G$  на поверхности  $X$  мы будем называть некоторую кривую  $k$  на поверхности, для которой  $G$  является гауссовой диаграммой. Будем говорить, что диаграмма  $G$  реализуется на поверхности  $X$ , если существует ее реализация на данной поверхности.

**3.1. Замечание.** Если гауссова диаграмма реализуется на поверхности рода  $g$ , то она, очевидно, реализуется на поверхности большего рода, чем  $g$ .

**3.2. Теорема** ([J. Scott Carter 1991: 1])

Для любой гауссовой диаграммы  $G$  существует такое число  $g \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , что диаграмма  $G$  реализуется на поверхности рода  $g$  и не реализуется на поверхности меньшего, чем  $g$ , рода (для плоской кривой  $g = 0$ ).

Это число  $g$  называется *родом гауссовой диаграммы  $G$* .

**Доказательство теоремы:**

□ Пусть  $G$  - гауссова диаграмма с  $n$  хордами. Построим сначала по диаграмме  $G$  кривую  $k$  (как одномерный комплекс в  $\mathbb{R}^3$ ). Возьмем  $n$  точек  $t_1, \dots, t_n$  (это будущие двойные точки кривой  $k$ ), в каждой точке  $t_s$  ( $s = 1, \dots, n$ ) зафиксируем упорядоченную пару неколлинеарных векторов  $(\bar{i}_s, \bar{j}_s)$ , таких, что векторы  $\bar{i}_s$  и  $\bar{j}_s$  параллельны некоторой фиксированной плоскости (например, координатной плоскости  $(Oxy)$ ). На диаграмме  $G$  занумеруем хорды. Обозначим  $s$ -ю хорду  $[t_s^-, t_s^+]$ , где  $\text{sign}(t_s^-) = (-1)$ ,  $\text{sign}(t_s^+) = (+1)$  и сопоставим ей точку  $t_s$ . Отметим на диаграмме  $G$  произвольную точку, не совпадающую с началом или концом какой-либо хорды. Обойдем окружность  $S^1$  диаграммы  $G$ , начиная с отмеченной точки. Если при обходе, мы прошли дугу от  $m$ -й хорды к  $l$ -й хорде ( $l, m = 1, \dots, n$ ) (так, что на этой дуге нет точек остальных хорд), то соединим точку  $t_m$  с точкой  $t_l$  ориентированным ребром:

- от вектора  $\bar{i}_m$  к вектору  $\bar{i}_l$ , в случае дуги от  $t_m^+$  к  $t_l^+$ ;

- от вектора  $\bar{j}_m$  к вектору  $\bar{j}_l$ , в случае дуги от  $t_m^-$  к  $t_l^-$ ;

- от вектора  $\bar{j}_m$  к вектору  $\bar{i}_l$ , в случае дуги от  $t_m^-$  к  $t_l^+$ ;

- от вектора  $\bar{i}_m$  к вектору  $\bar{j}_l$ , в случае дуги от  $t_m^+$  к  $t_l^-$  (Рис. 3a, b).

Построим по кривой (комплексу)  $k$  окрестность  $\tilde{F}g$ , которая представляет собой поверхность с краем (вдоль каждого ребра комплекса  $k$  - тривиальное оснащение: векторы перпендикулярные ребру и параллельные фиксированной плоскости). На Рис. 3 изображена гауссова диаграмма  $G$  (a), построенная по ней кривая  $k$  (b) и окрестность  $\tilde{F}g$  (c).

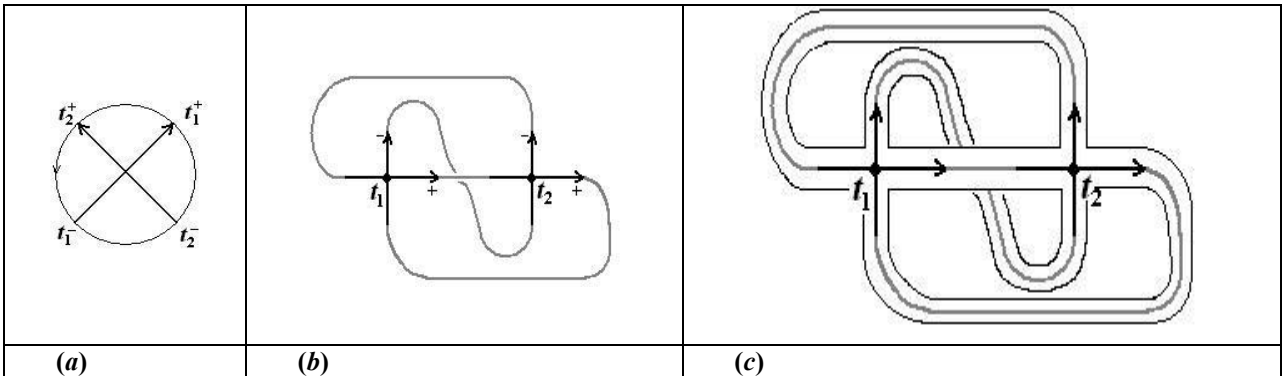


Рис. 3.

Край поверхности  $\partial \tilde{F}g$  - это набор окружностей. Заклеим каждую окружность диском и получим замкнутую поверхность  $F_g$ . Поверхность  $F_g$  ориентируема, так как ориентируема поверхность  $\tilde{F}g$ .

Минимальность рода поверхности  $F_g$  следует из способа ее построения. Действительно, если диаграмма  $G$  реализуется на поверхности  $F_m$ , то регулярной окрестностью кривой  $k$  является в точности поверхность  $\tilde{F}g$ , так что  $m \geq g$ . □

#### 4. Вычисление рода гауссовой диаграммы

Пусть  $G$  - гауссова диаграмма с  $n$  хордами, кривая  $k$  построена по этой диаграмме на поверхности минимального рода  $F_g$ .  $\tilde{F}g$  - регулярная окрестность кривой  $k$  на поверхности  $F_g$  (см. доказательство теоремы 3.2). В этом пункте мы опишем способ вычисления рода гауссовой диаграммы по самой диаграмме (не прибегая к построению окрестности  $\tilde{F}g$ ).

##### 4.1. Группы $H_1(\tilde{F}g)$ и $H_1(k)$

**4.1.1. Лемма.** Ранг целочисленной группы гомологий  $H_1(\tilde{F}g)$  равен  $(n+1)$ .

**Доказательство.**

□ Пусть  $m$  - число компонент края  $\partial \tilde{F}g$  ( $m \in \mathbb{N}$ ), тогда эйлерова характеристика поверхности  $\tilde{F}g$  равна  $\chi(\tilde{F}g) = 1 - (2g + m - 1) = 2 - 2g - m$ , так что  $\text{rang } H_1(\tilde{F}g) = 2g + m - 1$ .

С другой стороны, окрестность  $\tilde{F}g$  и кривая  $k$  гомотопически эквивалентны, то есть  $\chi(\tilde{F}g) = \chi(k) = n - 2n = -n$ . Следовательно,  $2g + m - 1 = n + 1$ . □

В виду того, что окрестность  $\tilde{F}g$  и кривая  $k$  гомотопически эквивалентны группы  $H_1(\tilde{F}g)$  и  $H_1(k)$  изоморфны. Найдем образующие группы  $H_1(k)$ .

Хорда на диаграмме  $G$  делит окружность  $S^1$  на две дуги, выбрав какую-нибудь из этих дуг для каждой хорды, мы получим  $n$  пар хорда-дуга. Каждая из таких пар при построении кривой  $k$  определяет некоторую петлю  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), то есть представляет некоторый элемент группы  $H_1(k)$ . Ясно, что и вся окружность  $S^1$  определяет некоторый элемент  $\beta_0 \in H_1(k)$ .

**4.1.2. Лемма.**  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ - образующие группы  $H_1(k)$ .

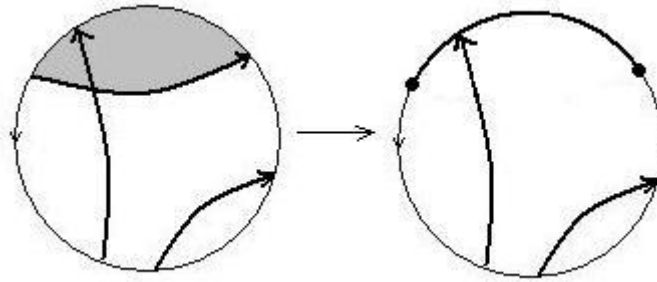
**Доказательство.**

□ Доказательство проведем по индукции по числу хорд на гауссовой диаграмме  $G$ .

1) Пусть диаграмма  $G$  - окружность  $S^1$  без хорд. Заклеим окружность диском и стянем этот диск в точку. Группа гомологий точки - нулевая, значит, приклеивая диск, мы уничтожили порождающий элемент группы  $H_1(k)$ .

2) Предположим, что утверждение леммы справедливо для всех гауссовых диаграмм с  $m$  хордами, где  $m < n$ .

Пусть диаграмма  $G$  - окружность  $S^1$  с  $n$  хордами ( $n > 0$ ). Возьмем произвольную хорду  $c$  на диаграмме  $G$ . Приклеим диск к хорде  $c$  и стягиваемой ей дуге, как показано на Рис. 4, далее стянем этот диск к окружности. В результате получим диаграмму  $G'$  с  $(n-1)$  хордой.



**Рис. 4**

Пусть  $k'$  - кривая, построенная по диаграмме  $G'$ , тогда  $\text{rang } H_1(k') = n$ , и образующие группы  $H_1(k')$  определяются на диаграмме  $G'$  хордами, которые так же являются хордами диаграммы  $G$ . С другой стороны  $H_1(k) = n + 1$ , значит, приклеив диск, мы уничтожили порождающий элемент группы  $H_1(k)$ . □

**4.2. Матрица  $\tilde{I}(k)$**

Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$  - образующие группы  $H_1(\tilde{F}g)$ . Составим матрицу  $\tilde{I}(k) = ([\alpha_i : \alpha_j])$  ( $i, j = 1, \dots, n + 1$ ), элементы которой  $[\alpha_i : \alpha_j]$  - индексы пересечения одномерных классов  $\alpha_i$  и  $\alpha_j$ . Ясно, что матрица  $\tilde{I}(k)$  - кососимметрическая и ее ранг - четное число (это матрица билинейной формы - индекса пересечений  $[\cdot : \cdot] : H_1(\tilde{F}g) \times H_1(\tilde{F}g) \rightarrow \mathbb{Z}$ )

**4.2.1. Лемма.**  $\text{rang } \tilde{I}(k) = 2g$ .

**Доказательство.**

□ Элементы  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$  - порождающие элементы группы  $H_1(F_g)$ , так как отображение  $in_* : H_1(\tilde{F}g) \rightarrow H_1(F_g)$  - эпиморфизм. Значит матрица  $\tilde{I}(k)$  - это матрица, составленная из индексов пересечения элементов, порождающих группу  $H_1(F_g)$ , и  $\text{rang } \tilde{I}(k) = \text{rang } H_1(F_g) = 2g$ . □

**4.2.2.Замечания.** (1) Так как  $\text{rang } H_1(\tilde{F}g) = 2g + m - 1$ , где  $m$  - число компонент края  $\partial \tilde{F}g$ , то билинейная форма  $[\cdot : \cdot]$  имеет степень вырождения, равную  $(m - 1)$ .

(2) Ранг матрицы  $\tilde{I}(k)$ , как ранг билинейной формы на  $H_1(\tilde{F}g)$ , не зависит от выбора образующих  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ .

**4.3. Матрица  $I(k)$**

Пусть  $c_0, c_1, \dots, c_n$  - пары хорда-дуга на диаграмме  $G$  (номер пары равен номеру хорды,  $c_0$  - вся окружность  $S^1$ ). По диаграмме  $G$  построим  $(n+1) \times (n+1)$  матрицу  $I(k) = ([c_i : c_j])$ . Для того чтобы определить  $ij$ -элемент этой матрицы, рассмотрим только те хорды, одна граница которых - на дуге пары  $c_i$ , другая граница - на дуге пары  $c_j$ . Просуммируем знаки всех точек-границ этих дуг, которые (точки) попали на дугу пары  $c_i$ , и получим элемент  $[c_i : c_j]$ . Пример вычисления элемента  $[c_i : c_j]$  - на Рис. 5. Ясно, что построенная матрица  $I(k)$  является кососимметрической.

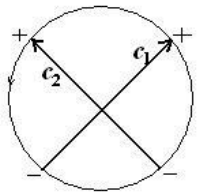
Гауссова диаграмма $G$	Вычисление элементов $[c_i : c_j]$	Комментарий
	$[c_0 : c_0] = 0$ $[c_0 : c_1] = -1$ $[c_0 : c_2] = +1$ $[c_1 : c_0] = 0$ $[c_1 : c_1] = 0$ $[c_1 : c_2] = +1$ $[c_2 : c_0] = -1$ $[c_2 : c_1] = -1$ $[c_2 : c_2] = 0$ $I(k) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	На дугу $c_1$ попадает конец хорды $c_2$ со знаком (+1), а другой конец этой хорды - на дуге $c_2$ , поэтому $[c_1 : c_2] = +1$

Рис. 5

**4.3.1. Теорема.**  $g = \frac{1}{2} \text{Rang } I(k)$

**Доказательство.**

□ Достаточно показать, что  $\text{rang } I(k) = \text{rang } \tilde{I}(k)$ .

Каждая пара  $c_i$  хорда-дуга на диаграмме  $G$  представляет на кривой  $k$  петлю с началом в точке  $t_i$  и образующую  $\alpha_i$  группы  $H_1(k)$ . Рассмотрим две петли на кривой  $k$ : одна - с началом в двойной точке  $t_i$ , другая с началом в двойной точке  $t_j$ . Индекс пересечения  $[\alpha_i : \alpha_j]$  - это сумма знаков точек пересечения этих петель. С другой стороны, точка пересечения этих петель - двойная точка кривой  $k$  - представлена на диаграмме  $G$  хордой, одна граница которой лежит на дуге пары  $c_i$ , другая - на дуге пары  $c_j$ , и знак каждой из границ этой хорды совпадает со знаком точки пересечения этих петель (Рис. 6). Следовательно,  $[\alpha_i : \alpha_j] = [c_i : c_j]$ . □

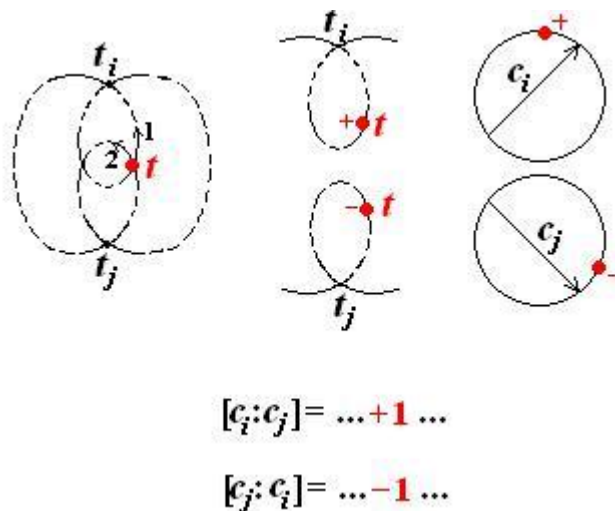


Рис. 6

**4.3.2. Пример.** Род диаграммы, изображенной на Рис. 5, как мы видим, равен единице ( $\text{rang } I(k) = 2$ ), то есть эта диаграмма реализуется на торе, но не реализуется на сфере.

**4.3.3. Замечание.** Ориентация поверхности  $F_g$  не играет роли при вычислении ранга матрицы  $I(k)$ , то есть при смене ориентации поверхности  $F_g$  ранг  $I(k)$  не изменится.

*Список использованной литературы*

1. Chmutov S. C., Duzhin S. V. Explicit Formulas for Arnold's Generic Curve Invariants // Arnold-Gelfand Mathematical Seminars: Geometry and Singularity Theory. - Birkhauser, 1997. - Pp. 123-138.
2. Polyak M. Invariants of Plane Curves and Fronts via Gauss Diagrams: Preprint Max-Planck-Istitut fur Math. - Bonn, 1994.
3. Scott Carter J. Classifying Immersed Curves // Proc. Amer. Math. Soc. - № 111 (1991). - Pp. 281-287.