Красникова Н. С., Турчанинова Е. В.
НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА-БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА РАСПОЛОЖЕНИЕ ИХ НУЛЕЙ

Источник
Альманах современной науки и образования
Тамбов: Грамота, 2008. № 12 (19). C. 84-86. ISSN 1993-5552.
Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html
Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2008/12/

НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА-БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА РАСПОЛОЖЕНИЕ ИХ НУЛЕЙ

Красникова Н. С., Турчанинова Е. В.
Южно-уральский государственный университет

Данная работа посвящена исследованию точной константы в неравенстве Джексона-Бернштейна на единичном круге комплексной плоскости для алгебраических многочленов порядка n $(n \geq 1)$, с комплексными коэффициентами, все нули которых лежат вне (открытого) круга радиуса $R > 0$ с центром в начале координат комплексной плоскости C.

Пусть $\tilde{P}_n$ есть множество алгебраических многочленов порядка n $(n \geq 1)$, с комплексными коэффициентами. На множестве $\tilde{P}_n$ определим функционалы

$$\|P_n\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| P_n\left(e^{it}\right) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\|P_n\|_\infty := \max\left\{ \left|P_n(z)\right| : |z| \leq 1 \right\}.$$

Введем некоторые обозначения. Обозначим за $\tilde{P}(R)_n$ множество многочленов степени n все n нулей z_k, $1 \leq k \leq n$, которых лежат вне (открытого) круга радиуса $R > 0$ с центром в начале координат комплексной плоскости C, т.е. удовлетворяют условию $|z_k| \geq R$.

Тогда на множестве $\tilde{P}(R)_n$ неравенство Джексона-Бернштейна имеет вид

$$\|P_n'\|_\infty \leq C_n(R) \|P_n\|_2, \quad P_n \in \tilde{P}_n(R), \tag{1}$$

где $C_n(R)$ точная (наименьшая) константа в этом неравенстве.

Теорема

При любых $n \geq 1$ и $R > 0$, удовлетворяющего неравенству

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \left(R^{2n} + 1\right) \leq \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(C_n^k\right)^2 R^{2k} \right)^{\frac{1}{2}},$$

точная константа в неравенстве (1) есть

$$C_n(R) = \left(\frac{n^2}{1 + R^{2n}} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство.

Ясно, что при любых $n \geq 1$ и $R > 0$ для точной константы $C_n(R)$ справедлива формула

$$C_n(R) = \sup\left\{ \frac{\|P_n'\|_\infty}{\|P_n\|_2} : P_n \in \tilde{P}_n(R) \right\}.$$

Многочлены P_n, степень которых равна n, записываются в виде:

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} c_j z^j = c_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k);$$

при исследовании неравенства (1) без ограничения общности, можно считать, что $c_n = 1$. Коэффициенты полинома P_n выражаются через соответствующие симметрические функции

$$\sigma_k(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq n} z_{j_1} z_{j_2} \ldots z_{j_k}$$

корней полинома по формулам Виета-Ньютона

$$c_k = (-1)^{n-k} \sigma_k(z_1, \ldots, z_n), \quad 0 \leq k \leq n-1;$$

в частности, $c_0 = (-1)^n z_1 \ldots z_n, \quad c_n = 1$.

Положим $\left|z_k\right| = R_k$, где $R_k \ge R, \quad 1 \le k \le n$.
Для нормы

$$\left\|P_n\right\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|P_n\left(e^{it}\right)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}};$$

Имеет место формула

$$\left\|P_n\right\|_2 := \left(\sum_{k=0}^{n}\left|c_k\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для нормы

$$\left\|P_n\right\|_\infty := \max\left\{\left|P_n\left(z\right)\right| : \left|z\right| \le 1\right\}$$

выполняется неравенство

$$\left\|P_n\right\|_\infty \le \sum_{k=0}^{n}\left|c_k\right|,$$

и, как следствие, неравенство

$$\left\|P_n'\right\|_\infty \le \sum_{k=0}^{n}k\left|c_k\right|.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского для суммы $\sum_{k=1}^{n-1}k\left|c_k\right|$, получаем оценку

$$\left\|P_n'\right\|_\infty \le n + Ax,$$

в которой

$$A = \left(\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{n\left(n-1\right)\left(2n-1\right)}{6}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$x = \left(\sum_{k=1}^{n-1}\left|c_k\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда следует, что для любого полинома $P_n \in \tilde{P}_n(R)$

$$\frac{\left\|P_n'\right\|_\infty^2}{\left\|P_n\right\|_2^2} \le \frac{\left(Ax+n\right)^2}{1+x^2+R_1^2\ldots R_n^2}.$$

Обозначим переменной y произведение $R_1\ldots R_n$. Тогда для константы $C_n\left(R\right)$ справедлива оценка

$$C_n^2\left(R\right) \le \max\left\{F_n\left(x,y\right) : x\in[0;+\infty),\ y\in[R^n;+\infty)\right\}$$

в которой

$$F_n\left(x,y\right) = \frac{\left(Ax+n\right)^2}{1+x^2+y^2}.$$

Наибольшее значение функции $F_n\left(x,y\right)$ в области $D = \left\{x\in[0;+\infty);\ y\in[R^n;+\infty)\right\}$ достигается в точке $\left(\frac{A}{n}\left(R^{2n}+1\right); R^n\right)$. Поэтому, если выполняется для параметра R неравенство

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n\left(n-1\right)\left(2n-1\right)}{6}\right)^{\frac{1}{2}}\left(R^{2n}+1\right) \le \left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(C_n^k\right)^2R^{2k}\right)^{\frac{1}{2}},$$

тогда точная константа в неравенстве (1) есть

$$C_n\left(R\right) = \left(\frac{n^2}{1+R^{2n}} + \frac{n\left(n-1\right)\left(2n-1\right)}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Теорема доказана.

Список использованной литературы

1. Арестов В. В. Интегральные неравенства для тригонометрических полиномов и их производных // Известия АН СССР. – 1982. - Т. 45.

2. Арестов В. В. Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности // Математические заметки. – 1990. - Т. 48. - Вып. 4.

3. Арестов В. В. О неравенствах различных метрик для тригонометрических полиномов // Математические заметки. – 1980. - Т. 27. - Вып. 4.

4. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. - М.: Издательство АН СССР, 1952. - Т. 1.

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ПРЕДМЕТА «КОНЦЕПЦИИ СОВРЕМЕННОГО ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ» ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Кузнецов В. В.
Институт физики молекул и кристаллов Уфимского научного центра РАН
Уфимский государственный нефтяной технический университет

Предмет «Концепции современного естествознания» рассматривает, как известно, основные достижения совокупности наук о природе, в первую очередь, физики, химии, геологии, космологии и биологии, и призван заменить полноценные курсы этих дисциплин для студентов гуманитарных и экономических специальностей высших учебных заведений всех форм обучения. Существующие учебные пособия, изданные в последнее время, например [Гусманова 1999; Найдыш 2007; Рузавин 2007; Садохин 2007; Самыгин 1999; Самыгин 2002; Стародубцев 2002; Солопов 1999], достаточно подробно излагают содержание обсуждаемого предмета. Каждый из отмеченных учебников имеет свои достоинства, связанные с достаточно обширной информативной базой представлений о современном естествознании - в этой связи наиболее удачными, на взгляд автора, являются монографии [Стародубцев 2002; Садохин 2007; Найдыш 2007], представляющие панораму воззрений, отражающих основные процессы в живой и неживой природе и помогающие получить представления о современной естественнонаучной картине мира. Основным недостатком отмеченных пособий, по моему мнению, за небольшим исключением [Стародубцев 2002; Гусманова 1999], является отсутствие четко очерченных концепций, позволяющих студенту-гуманитарию либо экономисту сформировать целостную и лаконичную систему взглядов на современное естествознание, которая сможет помочь ему в дальнейшей учебе и работе.

Изложение основ предмета, который по самой сути своей находится на стыке нескольких фундаментальных наук, безусловно связано с решением ряда дискуссионных проблем. Начать, хотя бы, с вопроса о профессиональной ориентации преподавателя, ведущего данный курс: физик (биофизик), химик (биохимик), биолог, знакомый с основами физики и химии, геолог, космолог или, наконец, философ (по мнению автора, преподаватели всех без исключения отмеченных направлений могли бы с успехом попробовать свои силы в данной области). Однако анализ тематики научно-методических конференций последних лет, посвященных проблемам повышения качества профессионального образования и внедрению соответствующих образовательных технологий, продемонстрировал практически полное отсутствие интереса к обсуждаемой дисциплине. Что вовсе не означает отсутствие самих проблем.

В Уфимском государственном нефтяном техническом университете (или УГНТУ) дисциплину «Концепции современного естествознания» (КСЕ) изучают студенты-первокурсники экономических специальностей «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», «Математические методы в экономике», «Финансы и кредит», а также «Налоги и налогообложение». Другими словами, это - будущие экономисты предприятий по добыче нефти и газа, а также сотрудники планово-экономических отделов нефтеперегонных и нефтехимических заводов. Цикл занятий рассчитан на один семестр и включает лекции (в зависимости от специальности от 16 до 30 часов) и практические занятия (от 8 до 20 часов). Последние для большинства специальностей предполагают написание и защиту рефератов на выбранную тему.

В рабочих программах по каждой специальности отмечено, что:

«*Студент должен знать: различные концепции описания естественных явлений;. структурные уровни организации материи; определения основных физических характеристик материи, пространства и времени, законы, их связывающие.*

Студент должен владеть: умением ориентироваться в потоке социально-научной информации для выбора значимых факторов при составлении экономических моделей общества».

Как же в действительности удается воплотить в жизнь декларируемые навыки и умения? Выделенного лекционного времени с трудом хватает на весьма краткий экскурс по истории естествознания, на формулировку справочных данных о формах и методах научного познания и на относительно детальное знакомство с основными концепциями естествознания. Последнее направление включает концепцию пространства-времени, корпускулярную и континуальную концепции, основные элементы молекулярно-кинетической теории, концепцию необратимости в термодинамике, понятие об энтропии, информацию о фундаментальном взаимодействии, концепции химического состава и строения, обратимости химических реакций, окисления-восстановления, а также основные теории происхождения жизни на Земле. Для одной из специальностей - «Налоги и налогообложение» - предусмотренные 30 часов лекционного времени позволяют дополни-