3. **Федорова В. Н., Степанова Л. А.** Краткий курс медицинской и биологической физики с элементами реабилитологии. Лекции и семинары: Учебное пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 624 с.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Щеглова С. Н.
Северо-Восточный государственный университет, г. Магадан

Теория дифференциальных уравнений является одним из самых больших разделов современной математики. Дифференциальные уравнения являются одними из основных математических понятий, наиболее широко применяемых при решении практических задач. Причина этого состоит в том, что при исследовании физических процессов, решении различных прикладных задач, как правило, не удается непосредственно найти законы, связывающие величины, характеризующие исследуемые явления. Обычно легче устанавливаются зависимости между теми же величинами и их производными или дифференциалами. Соотношениями такого рода и являются дифференциальные уравнения.

Изучая какие-либо физические явления, исследователь создает математическую модель, то есть, пренебрегая второстепенными характеристиками явления, записывает основные законы, управляющие этим явлением, в математической форме. Очень часто эти законы можно выразить в виде дифференциальных уравнений. Иногда, исследуя полученные дифференциальные уравнения вместе с дополнительными условиями, можно получить сведения о прошлом и будущем явления. Для составления математической модели в виде дифференциальных уравнений, как правило, не нужна информация обо всем явлении в целом. Математическая модель позволяет изучить процесс количественно, дать качественные оценки измерений. Естествознание является источником новых проблем для теории дифференциальных уравнений и в значительной мере определяет направление их исследований.

Теория дифференциальных уравнений тесно связана с другими разделами математики, такими как: функциональный анализ, алгебра и теория вероятностей. Некоторые большие и важные разделы математики были вызваны к жизни задачами теории дифференциальных уравнений. В теории дифференциальных уравнений ясно прослеживается основная линия развития математики: от конкретного и частного через абстракцию к конкретному и частному.

Многие разделы теории дифференциальных уравнений так разрослись, что стали самостоятельными науками. Можно сказать, что большая часть путей, связывающих абстрактные математические теории и естественнонаучные приложения, проходит через дифференциальные уравнения. Все это обеспечивает теории дифференциальных уравнений почетное место в современной науке.

С помощью дифференциальных уравнений можно решить такие актуальные задачи, как: описание природы морей и океанов, распада радиоактивных веществ, перевод текстов с одного языка на другой и многие другие.

Методы нахождения решения дифференциальных уравнений подразделяют на аналитические и приближенные. Приближенные в свою очередь делятся на численные и графические. Применение аналитических методов для решения дифференциальных уравнений позволяет получить решение в виде функции. Применение численных методов позволяет получить таблицу приближенных числовых значений искомого решения при заданных числовых значениях независимой переменной. Графические методы позволяют построить график решения дифференциального уравнения.

Рассмотрим решение дифференциальных уравнений различными методами.

Аналитический метод рассмотрим на примере решения однородных дифференциальных уравнениях первого порядка.

Определение 1: Дифференциальные уравнения первого порядка, представимые в виде $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (1)

называются ***однородными дифференциальными уравнениями первого порядка***.

Пример 1: Решите уравнение: $y^2 + x^2 \cdot \frac{dy}{dx} = xy \cdot \frac{dy}{dx}$ (2)

Решение:

Приведём уравнение (2) к виду (1), умножив обе его части на *dx*.

Получим $y^2dx + x^2dy = xy \cdot dy$ или $y^2dx + (x^2 - xy)dy = 0$ (3)

В уравнении (3) $P = y^2$ и $Q = x^2 - xy$.

Как видно, P и Q - однородные функции зависящие от x и y, причем обе являются Функциями второй степени, поэтому уравнение (2) однородное.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2} \tag{4}$$

Положим $y = zx$, (5)

где z - новая функция x.

Выражая z из равенства (5), найдем y. Для отыскания z продифференцируем по x равенство (5), получим:

$$\frac{dy}{dx} = z + x \cdot \frac{dz}{dx} \tag{6}$$

Подставим в уравнение (4) значения y и $\frac{dy}{dx}$, взятые из равенства (5) и (6), получим:

$$\left[\begin{array}{l} z + x\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z^2x^2}{zx^2 - x^2}, \\ \\ \qquad z = 1; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z^2}{z-1} - z, \\ \\ \qquad z = 1; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{z-1}, \\ \\ \qquad z = 1. \end{array}\right.$$

Разделяя переменные в полученном уравнении, имеем $\frac{z-1}{z}dz = \frac{dx}{x}$ или

$$\left(1 - \frac{1}{z}\right)dz = \frac{dx}{x},$$

$$\int\left(1 - \frac{1}{z}\right)dz = \int\frac{dx}{x},$$

$$z - \ln|z| = \ln|x| + C \tag{7}$$

Представим $z = \ln e^z$, тогда уравнение (7) примет вид:

$$\ln e^z - \ln|z| = \ln|x| + C \tag{8}$$

или $e^z = Cxz$.

Из равенства (5) находим $z = \frac{y}{x}$. Заменив в равенстве (8) z его найденным значением, получим:

$$e^{\frac{y}{x}} = Cx\frac{y}{x} \text{ или } e^{\frac{y}{x}} = Cy \tag{9}$$

Уравнение (9) – общее решение уравнения (2).

Приведем в качестве иллюстрации фрагмент Таблицы 1 других видов дифференциальных уравнений (ДУ) и способов их решений, разных приемов интегрирования.

Фрагмент Таблицы 1. *Типология ДУ первого порядка*

№ п/п	Вид уравнения	Название	Способ решения
1	$y' = f(x)$	простейшее	непосредственное интегрирование: $y = \int f(x)dx + C$
2	$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0.$ Частный случай: $y' = f(x)g(y)$	с разделяющимися переменными	• разделение переменных с помощью алгебраических преобразований, т.е. приведение к виду $M(x)dx + N(y)dy = 0$; • интегрирование ДУ с разделенными переменными.
3	$y' + P(x)y = Q(x),$ $P(x)$ и $Q(x)$ – данные непрерывные на $[a,b]$ функции; или $P(y)x = Q(y)$	линейное (с независимой переменной x) линейное (с независимой переменной y)	**1-й способ**: • замена $y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$, • данное ДУ сводится к двум уравнениям: а) $v' + P(x)v = 0,$ где $v = v(x)$, б) $u'v = Q(x)$, которые решаются

			последовательно как ДУ с разделяющимися переменными и находятся $u(x)$ и $v(x)$, • подстановка $u(x)$ и $v(x)$ в $y = uv$; **2-й способ (вариации произвольной постоянной)**: • решение однородного ДУ, соответствующего данному, т.е. при $Q(x) = 0$, • замена C на $C(x)$ в найденном $y_{об.}$, далее y и y' подставить в данное ДУ и найти $C(x)$, подставить $C(x)$ в общее решение: $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$.

Аналитические методы позволяют найти точное решение задачи, но лишь для ограниченного класса дифференциальных уравнений. Приближенные методы применяются для значительно более широкого круга задач.

Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений является одним из важнейших приложений теории дифференциальных уравнений. Большинство практических моделей исследуются именно с помощью приближенных методов решения. Объясняется это тем, что модели реальных объектов описываются достаточно сложными, для аналитического решения, уравнениями.

Существует множество приближенных методов решения дифференциальных уравнений. Чаще встречаются в литературе и используются следующие методы: метод ломаных, метод добавочного полушага, метод Эйлера, метод изоклин, метод Рунге-Кутта, метод Адамса.

В качестве приближенного метода решения дифференциальных уравнений рассмотрим метод изоклин.

Задача построения интегральной кривой часто решается введением изоклин. Метод изоклин позволяет построить интегральную прямую дифференциального уравнения, проходящую через данную точку, то есть решить задачу Коши графически.

Пусть дано уравнение $y' = f(x, y)$ (10)

Рассмотрим уравнение изоклин данного дифференциального уравнения $f(x, y) = C$, где $C = const$. Предположим, что на плоскости проведены изоклины $\Gamma_{c1}, \Gamma_{c2}, ...\Gamma_{cn}$, соответствующие возрастающей последовательности $c_0, c_1, ...c_n$ значений параметра C (Рис. 1). Для графического построения интегральной кривой $y = y(x)$ уравнения (10), предположим, что изоклина Γ_{c1} проходит через точку (x_1, y_1).

Рассмотрим линейный элемент (x_1, y_1, c_1), выходящий из точки (x_1, y_1), и обозначим через (x_2, y_2) точку пересечения этого элемента с Γ_{c2}. Пусть, далее, (x_3, y_3) является точкой пересечения линейного элемента (x_2, y_2, c_2) с Γ_{c3} и так далее (Рис. 1).

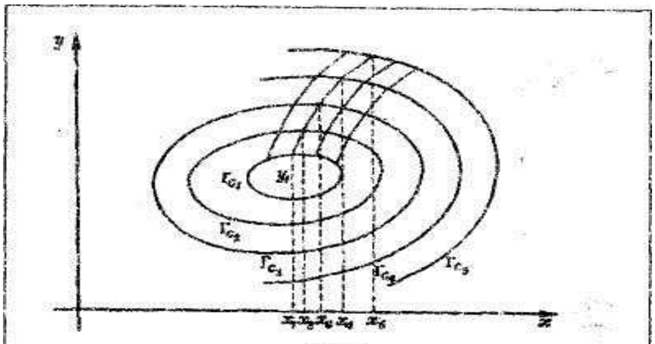

Рис. 1

Совокупность линейных элементов (x_1, y_1, c_1), (x_2, y_2, c_2) может рассматриваться как приближенное изображение искомой интегральной кривой. При этом должны выполняться условия теоремы о существовании и единственности решения.

Пример 2: Построим интегральную кривую уравнения $y' = \cos(x) - y$ *удовлетворяющую начальным условиям* $y_0 = 3, x_0 = 0.$

Решение:

Сначала найдем уравнения изоклин: $k = \cos(x) - y$ или $y = \cos(x) - k.$

Рассмотрим изоклины $\Gamma_0 ... \Gamma_8$ в соответствующей последовательности постоянных $k_0 ... k_8$. Найдем линейные элементы $a_0 ... a_8$ каждой изоклины, проходящие через точки $(0, y)$. Угловой коэффициент будем считать равным k. Определим k для изоклины проходящей через точку $(0,3)$. Для этого подставим координаты точки в уравнение изоклин $3 = \cos(0) - k$, получим $k = -2$.

Формулы, используемые для вычислений, представлены в Таблице 2.

Табл. 2. *Формулы для построения изоклин и их линейных элементов*

	k	**Уравнение изоклины**	**Вспомогательная точка**	**Уравнение линейного элемента**
Γ_0	-2	$y = \cos(x) + 2$	$y_0 = \cos(0) + 2$	$y = (-2) \cdot x + y_0$
Γ_1	-1,5	$y = \cos(x) + 1{,}5$	$y_0 = \cos(0) + 1{,}5$	$y = (-1{,}5) \cdot x + y_0$
Γ_2	-1	$y = \cos(x) + 1$	$y_0 = \cos(0) + 1$ $y_0 = \cos(0) - 2$	$y = -x + y_0$
Γ_3	-0,5	..	$y_0 = \cos(0) + 0{,}5$	$y = (-0{,}5) \cdot x + y_0$
Γ_4	0	$y = \cos(x)$	$y_0 = \cos(0)$	$y = y_0$
Γ_5	0,5	$y = \cos(x) - 0{,}5$	$y_0 = \cos(0) - 0{,}5$	$y = 0{,}5 \cdot x + y_0$
Γ_6	1	$y = \cos(x) - 1$	$y_0 = \cos(0) - 1$	$y = x + y_0$
Γ_7	1,5	$y = \cos(x) - 1{,}5$	$y_0 = \cos(0) - 1{,}5$	$y = 1{,}5 \cdot x + y_0$
Γ_8	2	$y = \cos(x) - 2$		$y = 2 \cdot x + y_0$

Используя результаты вычислений по данным формулам, построим соответствующие изоклины и их линейные элементы (Рис. 2).

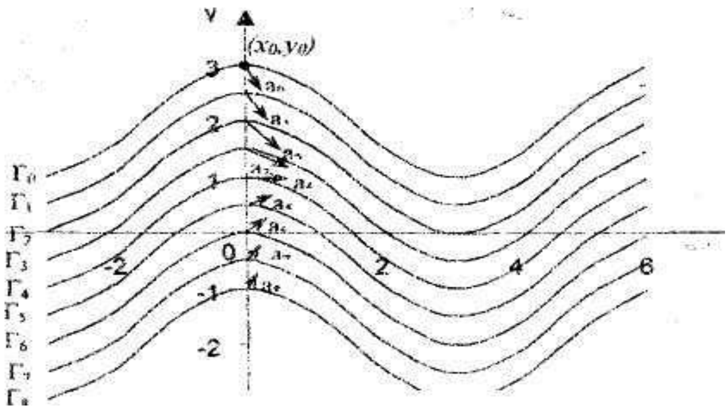

Рис. 2

Точка, через которую будем строить интегральную кривую, принадлежит Γ_0. Параллельным переносом переместим линейный элемент a_0 в точку (x_0, y_0) и, продолжив до пересечения с Γ_1, получим точку (x_1, y_1). Далее рассмотрим точку (x_1, y_1), принадлежащую изоклине Γ_1, и линейный элемент этой изоклины a_1. Параллельным переносом переместим линейный элемент a_1 в точку (x_1, y_1) и, продолжив его до пересечения с Γ_2, получим точку (x_2, y_2) и так далее. Совокупность линейных элементов $a_0, a_1, ... a_5$ или ломанная которой будут принадлежать точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_6, y_6)$ будет являться приближенным изображением графика интегральной кривой. На Рисунке 3 пунктиром изображена истинная интегральная кривая.

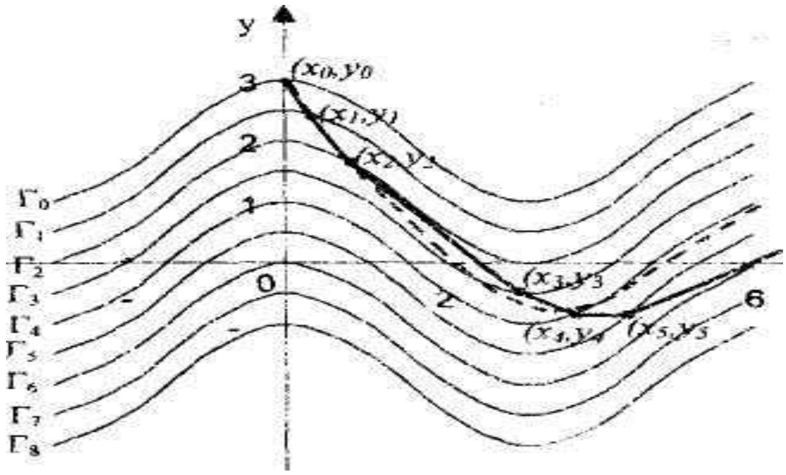

Рис. 3

Точность чертежа может быть, очевидно, увеличена путем увеличения масштаба изображения и числа построенных изоклин и соответствующим им линейных элементов. Однако увеличение масштаба имеет свои границы.

Отметим, что метод изоклин дает наиболее полное представления о таком понятии как поле направлений. Графическое изображение интегральной кривой позволяет делать выводы о свойствах решения дифференциального уравнения.

Метод изоклин является одним из наиболее сложных приближенных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и позволяет сформировать у студентов высокий уровень графической и вычислительной культуры. Кроме того, применение метода изоклин позволяет визуализировать процесс решения задачи Коши, таким образом, при его изучении реализуется принцип наглядности в обучении математике.

Список использованной литературы

1. **Асланов Р. М. и др.** Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными: Учеб. пособие. - М.: Изд-во МПГУ, 2003.
2. **Дифференциальные уравнения**: Учебное пособие для студентов-заочников IV курса физ.-мат. фак. / Н. Я. Виленкин, М. А. Доброхотова, А. Н. Сафонов. - М.: Просвещение, 1984. – 286 с.
3. **Сансоне Дж.** Обыкновенные дифференциальные уравнении. — М.: Изд. иностранной литературы, 1954. – 320 с.

ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНЫЙ ПОДХОД К НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКЕ

Яхъяева Г. Э.
Новосибирский государственный университет

Введение

Одной из задач математической логики (как классической, так и неклассической) является формализация полученных знаний. Изначально логика была призвана исключить неопределенность, неоднозначность из рассуждений и формализовать только точные знания. Каждый рассматриваемый классической логикой факт или имеет место, или нет. Каждое описываемое свойство является четким, т.е. все объекты либо обладают этим свойством, либо не обладают.

Однако во второй половине XX века в научном сообществе созрело понимания необходимости формализации так же и неточной информации. Один за другим начинают возникать различные направления для формализации неточной информации: нечеткая логика, нейровычисления, генетические вычисления, вероятностные вычисления и др. Позднее все эти направления объединят под общим названием *мягкие вычисления* (Soft Computing).

В данной статье мы рассмотрим одно из этих направлений – нечеткую логику. Годом рождения данного направления считается 1965 год, когда вышла первая статья Лофти Заде [Zadeh 1965: 8].

Основной идей данного подхода является то, что на вопрос «принадлежит ли объект *a* множеству *A*?» не всегда возможно дать точный ответ «да» или «нет». То есть, отношение принадлежности объекта множеству является «нечетким» и помимо значений «*истинно*» и «*ложно*» может принимать и промежуточные значения.

На сегодняшний день существует два альтернативных способа формализации феномена нечеткости: *функциональные нечеткие логики* и *логики фазификаций булевозначных моделей*.

Целью данной работы является сравнение данных направлений с точки зрения теории моделей.