2. **Зайцев О. С.** Методика обучения химии: теоретический и прикладной аспекты: Учеб. для студ. высш. учеб. заведений. - М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 1999. – 384 с.

3. **Информатика:** Учеб. пособие для студ. пед. вузов / А. В. Могилев, Н. И. Пак, Е. К. Хеннер / Под ред. Е. К. Хеннера. 2-е изд., стер. - М.: Издательский центр «Академия», 2003. - 816 с.

4. **Информатика:** Учебник / Под ред. проф. Н. В. Макаровой. - М.: Финансы и статистика, 1997. - 768 с.

5. **Практикум по курсу «Информатика».** Работа в Windows 2000, Word, Excel: Учеб. пособие. - 2-е изд., доп. и перераб. - М.: Финансы и статистика, 2003. - 544 с.

6. **Талызина Н. Ф.** Педагогическая психология. - М.: Издательский центр «Академия», 1999. - 288 с.

КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР И ЕГО СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Филиппенко В. И.

Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса

В настоящей работе рассматривается некоторое обобщение линейного формально-самосопряженного дифференциального оператора. Построены его обобщенные резольвенты и обобщенные спектральные функции.

1. Пусть $F=(f_{ij})$ - $(n\times n)$ - матрица, составленная из комплекснозначных функций, определенных на интервале $I=(a;b),\ (-\infty\le a<b<+\infty)$, и удовлетворяющих следующим условиям:

(1) $f_{ij}=0$ в интервале $I=(a,b)$ для индексов, удовлетворяющих неравенствам $2\le i+1<j\le n$;

(2) f_{ij} - локально суммируемы, т. е. $f_{ij}\in L_{loc}(I)$ для $1\le i,j\le n$;

(3) $f_{i\,i+1}\ne 0$ в I для $1\le i\le n-1$.

Определим квазипроизводные $y^{[k]}$ следующим образом:

$$y^{[0]}=y,\ y^{[i]}=f_{i,i+1}^{-1}\left[\left(y^{[i-1]}\right)'-\sum_{j=1}^{i}f_{ij}y^{[j-1]}\right],\ i=1,\dots,n-1,\ y^{[n]}=\left(y^{[n-1]}\right)'-\sum_{j=1}^{n}f_{nj}y^{[j-1]}$$

Соответствующий симметрический оператор с плотной областью определения рассматривался в работах автора [Филиппенко 2006: 2, 3].

Предположим, что рассматриваемые функции y и их квазипроизводные до $(n-1)$-го порядка включительно абсолютно непрерывны на компактах из I.

Поскольку в дальнейшем будем рассматривать только симметрические квазидифференциальные выражения, то предположим, что матрица F, кроме требований (1), (2) и (3), удовлетворяет также условию симметричности $F=-J^{-1}F^{*}J$, где F^{*} - матрица, сопряженная к матрице F, $J=\left((-1)^{s}\delta_{s,n+1-j}\right)$, δ_{sk} - символ Кронекера. Если натуральное число n - четно, то J - косоэрмитова матрица. Если натуральное n - нечетно, то $iJ,-iJ$ - косоэрмитовы матрицы.

Можно считать, что скалярное квазидифференциальное выражение $l_n[y]=i^{n}y^{[n]}$, где i - мнимая единица, порождается матрицей F. Операция l_n порождает минимальный замкнутый симметрический оператор L в гильбертовом пространстве $L^2{}_w(I)$.

Пример. Пусть матрица, задающая квазидифференциальное выражение, имеет вид

$$F=\begin{Vmatrix} a & b & 0 & 0\\ c & d & f & 0\\ q & h & -\bar d & \bar b\\ k & -\bar q & \bar c & -\bar a\end{Vmatrix},$$

где f,h и k - вещественнозначные функции, а b,f не равны нулю. Тогда квазидифференциальная операция $l_4[y]$, порожденная матрицей, F примет вид

$$l_4[y]=\left(y^{[3]}\right)'+\bar a y^{[3]}-cy^{[2]}+\bar q y^{[1]}-ky,$$

где

$$y^{[1]} = b^{-1}(y' - ay),$$
$$y^{[2]} = f^{-1}\left[\left(y^{[1]}\right)' - dy^{[1]} - cy\right],$$
$$y^{[3]} = \bar{b}^{-1}\left[\left(y^{[2]}\right)' + \bar{d}y^{[2]} - hy^{[1]} - qy\right].$$

Если
$$F = \begin{Vmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ c & 0 & f & 0 \\ 0 & h & 0 & b \\ k & 0 & c & 0 \end{Vmatrix},$$
и, кроме того, $b = p^{-1}$, а $f = r^{-1}$, то
$$l_4[y] = \left(p\left(\left(r\left(\left(py'\right)' - cy\right)\right)' - hpy'\right)\right)' - cr\left(\left(py'\right)' - cy\right) - ky.$$
Если $p = 1$ и $c = 0$, то квазидифференциальное выражение $l_4[y]$ примет вид
$$l_4[y] = \left[\left(ry''\right)' - hy'\right]' - ky.$$

2. Для любых функций y и z, к которым применима операция l_n, имеет место обобщенная формула Лагранжа
$$l_n[y]\bar{z} + (-1)^{n+1} y\overline{l_n[z]} = \{y, z\}', \tag{1}$$
где $\{y, z\} = \sum\limits_{j=0}^{n-1}(-1)^{n+1-j} y^{[j]} \overline{z^{[n-j-1]}}$. Интегрируя почленно левую и правую части формулы Лагранжа (1), получим формулу Грина
$$\int_\alpha^\beta l_n[y]\bar{z}dx + (-1)^{n+1}\int_\alpha^\beta y\overline{l_n[z]}dx = \{y, z\}\Big|_{x=\alpha}^{x=\beta},\ \alpha, \beta \in I,$$
где $\{y,z\}\big|_\alpha^\beta = \{y,z\}(\beta) - \{y,z\}(\alpha)$. Заметим, что $\{y, z\} = (J\tilde{y}, \tilde{z})$, где $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение в n-мерном евклидовом пространстве, $\tilde{y}$ - вектор-столбец, составленный из квазипроизводных $y^{[0]}, y^{[1]}, ..., y^{[n-1]}$, а $\tilde{z}$ - вектор-столбец, составленный из квазипроизводных $z^{[0]}, z^{[1]}, ..., z^{[n-1]}$.

С помощью матрицы $\tilde{J} = J$, если n четное, и $\tilde{J} = \pm iJ$, если n нечетное, то тождество Лагранжа можно переписать в виде
$$l_n[y]\bar{z} - y\overline{l_n[z]} = \frac{d}{dx}\left(\tilde{z}^*\tilde{J}\tilde{y}\right).$$

Теорема 1. *Пусть $n \times n$-матрица-функция F - удовлетворяет условиям (1) - (3) и $l[y] = i^n y^{[n]}$. Если измеримые функции $w, f \in L_{loc}(I)$, где w - положительная функция на I, то для любого $\lambda \in C$, любых $t_0 \in I$ и любых $c_i \in C,\ i = 0,1,...n-1$, существует единственное решение y, заданное на I, задачи Коши: $l[y] = \lambda wy + f$, $y^{[i]}(t_0) = c_i$, $i = 0,1,...,n-1$.*

Доказательство этой теоремы можно получить с помощью метода последовательных приближений.

3. Построим обобщенную резольвенту R_λ оператора L. Для этого найдем то решение квазидифференциального уравнения $w^{-1}l_n[y] - \lambda y = f$, которое удовлетворяет краевым условиям, определяющим квазисамосопряженное расширение этого оператора. В результате получим R_λ в виде интегрального оператора, ядро которого выражается через фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения, сопряженную к ней фундаментальную систему решений и некоторую матрицу-функцию $M(\lambda)$, называемую характеристической матрицей-функцией, соответствующей обобщенной резольвенты R_λ оператора L:
$$R_\lambda f = \int_a^b y^\tau(x;\lambda)\left(M(\lambda) + \frac{1}{2}sign(s-x)\tilde{J}\right)y(s;\lambda)f(s)w(s)ds,\ (x, s \in (a,b), \operatorname{Im}\lambda \cdot \operatorname{Im}\lambda_0 > 0)$$

Здесь условие $\operatorname{Im}\lambda \cdot \operatorname{Im}\lambda_0 > 0$ позволяет фиксировать комплексную полуплоскость, содержащую точку λ_0.

Как известно, каждой спектральной функции $E_t(-\infty < t < +\infty)$ оператора L отвечает некоторая обобщенная резольвента R_λ, определенная формулой $R_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE_t}{t-\lambda} \ (\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$, где E_t - обобщенная спектральная функция оператора L. Введем обозначение $E_{\alpha,\beta} = \frac{E_\beta + E_{\beta+0}}{2} - \frac{E_\alpha + E_{\alpha+0}}{2} \ (-\infty < \alpha, \beta < +\infty)$.

При помощи формулы обращения Стилтьеса спектральная функция E_t однозначно восстанавливается по соответствующей ей обобщенной резольвенте R_λ; для любых функций $f(x)$ и $g(x)$ из $L^2{}_w(a,b)$ и любых вещественных α и β имеет место равенство:

$$(E_{\alpha,\beta} f, g) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \to +0} \int_\alpha^\beta ([R_{\sigma+i\tau} - R_{\sigma-i\tau}] f, g) d\sigma \qquad (2)$$

Равенство (2) позволяет построить формулу всех обобщенных спектральных функций E_t оператора L.

Пусть R_λ - какая-либо обобщенная резольвента оператора L и $M(\lambda)$ - ее характеристическая матрица. Определим матрицу $T(\sigma)$ формулой

$$T(\sigma) = \frac{1}{\pi} \lim_{\tau \to +0} \int_0^\sigma \operatorname{Im} M(\sigma + i\tau) d\sigma \qquad (3)$$

Формула (3) имеет смысл при любом вещественном σ и $T(\sigma)$ является неубывающей матричной функцией. Матрицу $T(\sigma)$ называют спектральной матрицей-функцией распределения оператора L, соответствующей обобщенной резольвенте R_λ.

Пусть $L_T^2(-\infty, +\infty)$ - гильбертово пространство n-мерных векторных функций $\eta(\sigma) = (\eta_1(\sigma), \eta_2(\sigma), \ldots, \eta_n(\sigma)) \ (-\infty < \sigma < +\infty)$,

которые будем рассматривать как одностолбцевые матричные функции; скалярное произведение в пространстве $L_T^2(-\infty, +\infty)$ определяется формулой

$$(\eta, \chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^*(\sigma) dT(\sigma) \eta(\sigma).$$

Теорема 2. *Для любой функции* $f(x)$ *из пространства* $L_w{}^2(a,b)$ *имеет место равенство* $\int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta^*(f;\sigma) dT(\sigma) \eta(f;\sigma)$, *где*

$$\eta(f;\sigma) = \int_a^b f(s) y(s;\sigma) w(s) ds; \qquad (4)$$

при этом интеграл в (4) сходится в смысле метрики пространства $L_T^2(-\infty, +\infty)$.

Для доказательства этой теоремы следует к соотношению $y(f;x;\lambda) = R_\lambda f$ применить интегральное преобразование Стилтьеса.

Теорема 3. *Совокупность всех спектральных функций* $E_t(-\infty < t < +\infty)$ *оператора* L *определяется формулой*

$$E_{\alpha,\beta} = \int_\alpha^\beta y'(x;\sigma) dT(\sigma) \eta(f;\sigma) \ \left(f \in L^2(a,b)\right),$$

где $T(\sigma) \ (-\infty < \sigma < +\infty)$ *- спектральная матрица-функция распределения оператора* L, *соответствующая его обобщенной резольвенте* R_λ.

Замечание. Асимптотические методы [Федорюк 1966: 1] позволяют исследовать спектра оператора L в терминах коэффициентов операции l_n.

Список использованной литературы

1. **Федорюк, М. В.** Асимптотические методы в теории одномерных сингулярных дифференциальных операторов [Текст] / М. В. Федорюк // Труды московского математического общества. 1966. - Т. 15. - С. 296-345. Библиогр.: С. 345.

2. **Филиппенко, В. И.** Спектральные методы в теории операторов [Текст] / В. И. Филиппенко // Операторы и уравнения в линейных топологических пространствах / Ин-т прикладной математики и информатики ВНЦ РАН. - Владикавказ: ВНЦ РАН, 2006. - С. 143-326. Библиогр.: с. 320-326.

3. **Филиппенко, В. И.** Линейные квазидифференциальные операторы в гильбертовом пространстве [Текст] / В. И. Филиппенко // Исслед. по функц. ан. и его приложениям. - М.: Наука, 2006. - С. 293-344. Библиогр.: с. 342-344.

УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ ЧАСТОТНОГО КРИТЕРИЯ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Чернышев А. Б.

ГОУ ВПО «Северо-Кавказский государственный технический университет», филиал в г. Кисловодске

Для нелинейных систем с сосредоточенными параметрами В.М. Поповым предложен частотный критерий определения абсолютной устойчивости, то есть устойчивости системы при любых начальных отклонениях для любой формы нелинейной характеристики, принадлежащей к некоторому определенному классу. В целях интерпретации указанного критерия для анализа систем управления с распределенными параметрами можно предположить выполнение следующих условий.

1. *Нелинейное звено представлено в виде последовательного соединения нелинейного элемента и линейной части.*

Общее соотношение между выходом и стандартизирующим входом линейного распределенного блока определяется в форме пространственно-временной композиции [Рапопорт 2003: 3].

$$Q(x,t)=\int_0^t\int_D G(x,\xi,t,\tau)\cdot w(\xi,\tau)d\xi d\tau = G(x,\xi,t,\tau)\circ w(\xi,\tau)$$

В достаточно общем случае подобное соотношение для нелинейного блока принимает вид следующего нелинейного интегрального оператора [Бутковский 1985: 1]:

$$Q(x,t)=\int_0^t\int_D P(x,\xi,t,\tau,w(\xi,\tau))d\xi d\tau$$

Где $P(x,\xi,t,\tau,w)-$ ядро оператора, являющееся заданной нелинейной функцией входного воздействия $w(\xi,\tau)$. В частности, ядро интегрального оператора может быть представлено в виде произведения

$$P(x,\xi,t,\tau,w)=S(x,\xi,t,\tau)\cdot h(\xi,\tau,w),$$

где сомножитель $S(x,\xi,t,\tau)$ играет роль аналога функции Грина $G(x,\xi,t,\tau)$ относительно нелинейной функции h от входа $w(\xi,\tau)$. Нелинейный интегральный оператор приводится к композиции

$$Q(x,t)=\int_0^t\int_D S(x,\xi,t,\tau)\cdot h(\xi,\tau,w)d\xi d\tau = S(x,\xi,t,\tau)\circ h(\xi,\tau,w)$$

Такой блок называется нелинейным блоком Гаммерштейна. Блок Гаммерштейна представляется последовательным соединением линейного распределенного блока, характеризуемого функцией Грина $S(x,\xi,t,\tau)$ и блока с нелинейностью h. Тем самым осуществляется выделение в нелинейном блоке линейной динамической части, подобно тому, как это часто делается в теории нелинейных систем с сосредоточенными параметрами. Нелинейные блоки могут включаться в общую структуру распределенной системы. Тогда уже нельзя говорить о ее передаточных функциях. В работе [Рапопорт 2003: 3] показано, что в целом при наличии нелинейностей задачу определения выхода $Q(x,t)$ нелинейной системы по заданному входу $w(\xi,\tau)$ часто удается свести к решению относительно $Q(x,t)$ некоторого нелинейного интегрального уравнения. Решение таких уравнений можно получить в общем случае только численными методами.

2. *Линейный блок системы может быть представлен бесконечной совокупностью независимых контуров.*

Объект автоматического управления должен обладать свойством пространственной инвариантности. Пусть имеется распределенный объект, математическая модель которого описывается уравнениями

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t}=L_i\left(Q_i;\frac{\partial Q_i}{\partial x};\ldots;\frac{\partial^{n_1}Q_i}{\partial x^{n_1}};\frac{\partial Q_i}{\partial y};\ldots;\frac{\partial^{n_2}Q_i}{\partial y^{n_2}};\frac{\partial Q_i}{\partial z};\ldots;\frac{\partial^{n_3}Q_i}{\partial z^{n_3}}\right),\quad x,y,z\in V,\quad \left(i=\overline{1,n}\right),$$

где $Q_i(x,y,z,t)-$ фазовые переменные $\left(i=\overline{1,n}\right)$; $x,y,z-$ пространственные координаты; $t-$ время; $V-$ пространство изменения переменных x,y,z; n,n_1,n_2,n_3- заданные целые числа; L_i- линейные операторы. Пусть входное воздействие представлено в виде ряда

$$u_\mu(x,y,j\omega t)=\sum_{\eta,\gamma=1}^{\infty}\sum_{\xi=1}^{4}C_{\mu,\eta,\gamma,\xi}(j\omega t)\cdot B_{\mu,\eta,\gamma,\xi}(x,y)\quad\left(\mu=\overline{1,m}\right).$$

Объект автоматического управления, представленный в указанной форме называется пространственно-инвариантным, если комплексный передаточный коэффициент по каждой составляющей входного воздействия не зависит от пространственных координат [Першин 2003: 2]. На физическом уровне это означает, что составляющая входного воздействия, проходя через объект управления, изменяет только амплитуду про-