

Чистяков А. Е., Сухинов А. И.

МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ВОДНОЙ СРЕДЫ В МЕЛКОВОДНЫХ ВОДОЕМАХ

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2008/1/91.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2008. № 1 (8). С. 217-220. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2008/1/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

важная роль математики в науке и технике должна найти соответствующее выражение в математическом образовании выпускников учебных заведений.

Чтобы будущий специалист мог применять в своей практической деятельности математические методы, ему необходимо на студенческой скамье овладеть основами соответствующих математических теорий. Очень важно научить студента видеть математическую основу в производственных процессах. Необходимо готовить будущих специалистов для самостоятельной работы; чтобы выпускники учебных заведений могли находить решения проблем, которые могут появиться в жизни. Поэтому, разъясняя в курсе математики то или иное понятие, следует указывать область его применения. Излагать математическую теорию нужно так, чтобы за формулировками определений и теорем, за формулами студент мог увидеть реальные явления и образы. Научить будущего специалиста нужно не только правильно формулировать задачи и решать их, но и раскрывать геометрический, физический, механический, экономический смысл.

Чтобы управлять процессом обучения математике, необходимо определить содержание математических курсов; разработать учебную программу, задания к контрольным работам и типовым расчетам с учетом решения прикладных вопросов, отражающих специфику вуза. Следует объяснять, например, что производная характеризует не только скорость механического движения или наклон кривой к оси, но скорость химической реакции, может определять силу электрического тока, интенсивность нагрузки, коэффициент сжимаемости грунта, коэффициент бокового давления на грунт, теплоемкость тела и т.д.

Во всех разделах математики имеется множество прикладных задач, которые можно решать с первых дней обучения. Таким образом осуществляется связь математики с другими дисциплинами.

При составлении программы по математике необходимо также учитывать специфику специальности: что является наиболее важным, центральным для данного направления, а какие факты достаточно знать как информационные. Для выпускника технического заведения, например, существенную роль могут играть умение дифференцировать, интегрировать, находить точное или приближенное решение дифференциального уравнения. А тонкости, связанные с доказательством теорем, с обоснованиями выводов сложных формул, решающей роли играть не будут.

По мере накопления знаний и математической грамотности у студента появляется математическая культура. Выпускник учебного заведения, владеющий основами математических теорий, быстрее усваивает суть производственных процессов, успешнее овладевает навыками математической обработки экспериментальных и научных данных, умеет читать нужную литературу и становится грамотным и ценным специалистом.

Таким образом, в курсе математики технического вуза необходимо на современном научном уровне, учитывая специальность учащихся, изучать те вопросы, которые пригодятся им в учебной и профессиональной деятельности. Воспитывать общую культуру, формировать и развивать мировоззрение и личность будущего специалиста. Это может быть достигнуто, если разработанная программа курса математики включает в себя разделы, важнейшие для данного учебного заведения, с учетом требований специализации после его окончания, а также имеет связь с общетеоретическими дисциплинами.

МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ВОДНОЙ СРЕДЫ В МЕЛКОВОДНЫХ ВОДОЕМАХ

Чистяков А. Е., Сухинов А. И.

Таганрогский технологический институт Южного федерального университета

Работа посвящена разработке математической модели для расчета полей скоростей применительно к Азовскому морю. Азовское море расположено на юго-западе России и имеет максимальную протяженность с севера на юг ≈ 250 км., с запада на восток ≈ 350 км., а максимальная глубина 15м.



Рис. 1. Модель Азовского моря: 351x251 узлов в горизонтальной плоскости

Модель предназначена для оценки и прогнозирования состояния водной среды водоема. Математическое описание основано на выделении осредненных составляющих параметров течения среды (скорости, давле-

ния). Уравнение модели движения жидкости рассматриваются в прямоугольной области геоинформационной системы Азовского моря (Рис. 1) с шагом по горизонтальным координатным направлениям 1000 м и 1 м. по вертикальному. Направим оси Ox и Oy в горизонтальном направлении с запада на восток и с севера на юг соответственно. Ось Oz направим вертикально вниз.

Исходными уравнениями гидродинамики являются:

Уравнение движения (Навье - Стокса):

$$u'_t + uu'_x + vv'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} P'_z + (\mu u'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (v v'_z)'_z + 2\Omega(v \sin \theta - w \cos \theta), \quad (1)$$

$$v'_t + uv'_x + vv'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} P'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (v v'_z)'_z - 2\Omega u \sin \theta, \quad (2)$$

$$w'_t + uw'_x + vv'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} P'_z + (\mu w'_x)'_x + (\mu w'_y)'_y + (v w'_z)'_z + 2\Omega u \cos \theta + g. \quad (3)$$

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$u'_x + v'_y + w'_z = 0 \quad (4)$$

Полное гидростатическое давление связано с глубиной соотношением:

$$P(x, y, z, t) = a(x, y, z, t) + \rho g z \quad (5)$$

Продифференцируем уравнение (5)

$$P'_x = a'_x \quad (6)$$

$$P'_y = a'_y \quad (7)$$

$$P'_z = a'_z + \rho g \quad (8)$$

Запишем уравнения (1) - (3) с учетом (6) - (8)

$$u'_t + uu'_x + vv'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} a'_z + (\mu u'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (v v'_z)'_z + 2\Omega(v \sin \theta - w \cos \theta), \quad (9)$$

$$v'_t + uv'_x + vv'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} a'_y + (\mu v'_x)'_x + (\mu v'_y)'_y + (v v'_z)'_z - 2\Omega u \sin \theta, \quad (10)$$

$$w'_t + uw'_x + vv'_y + ww'_z = -\frac{1}{\rho} a'_z + (\mu w'_x)'_x + (\mu w'_y)'_y + (v w'_z)'_z + 2\Omega u \cos \theta. \quad (11)$$

Система уравнений (9) - (11), где $V = \{u, v, w\}$ - компоненты вектора скорости, P - гидростатическое давление, ρ - плотность, Ω - угловая скорость вращения земли, θ - угол между вектором угловой скорости и вертикалью, μ, ν - горизонтальная и вертикальная составляющая коэффициента турбулентного обмена, задана при следующих граничных условиях:

- на входе (Устье рек Дон и Кубань, а также озеро Сиваш)

$$u(x, y, z, t) = u(t) \quad v(x, y, z, t) = v(t) \quad a'_n(x, y, z, t) = 0 \quad V'_n(x, y, z, t) = 0, \quad (12)$$

- боковая граница (берега и дно Азовского моря)

$$\rho, \mu (u')_n(x, y, z, t) = -\tau_x(t) \quad \rho, \mu (v')_n(x, y, z, t) = -\tau_y(t) \quad V_n(x, y, z, t) = 0 \quad a'_n(x, y, z, t) = 0, \quad (13)$$

- верхняя граница (поверхность Азовского моря)

$$\rho \mu (u')_n(x, y, z, t) = -\tau_x(t) \quad \rho \mu (v')_n(x, y, z, t) = -\tau_y(t) \quad w(x, y, t) = -\omega \quad a'_n(x, y, t) = 0, \quad (14)$$

- на выходе (выход в Черное море)

$$P_n(x, y, z, t) = 0 \quad V'_n(x, y, z, t) = 0 \quad (15)$$

где ω - интенсивность испарения жидкости, τ_x, τ_y - составляющие тангенциального напряжения (закон Ван-Дорна), ρ_v - плотность взвеси.

В Таблице 1 представлены среднегодовые данные водного баланса. Они используются в граничных условиях (12)-(14).

Табл. 1. Данные водного баланса

Гирла Свиное, Кривое и Богдан	+82 м ³ /с
Гирло Песчаное	+199 м ³ /с
Гирло Мериновое	+105 м ³ /с
Гирло Мокрая Кутерьма	+185 м ³ /с
Гирло Кутерьма	+424 м ³ /с
Гирла Мертвый Донец и Средняя Кутерьма	+390 м ³ /с
Кубань	+923 м ³ /с
Черное море	-1587 м ³ /с
Сиваш	-115 м ³ /с
Испарение	-606 м ³ /с

Составляющие тангенциального напряжения для свободной поверхности:

$$\tau_x = \rho_a C_p (|\vec{w}|) w_x |\vec{w}|, \quad \tau_y = \rho_a C_p (|\vec{w}|) w_y |\vec{w}|$$

где \vec{w} - вектор скорости ветра относительно воды, ρ_a - плотность атмосферы,

$$C_p (|\vec{w}|) = \begin{cases} 0.0088, & |\vec{w}| < 6,6 \text{ м/с} \\ 0.0026, & |\vec{w}| \geq 6,6 \text{ м/с} \end{cases} - \text{безразмерный коэффициент.}$$

Составляющие тангенциального напряжения для дна, с учетом введенных обозначений, могут быть записаны следующим образом:

$$\tau_x = \rho C_p (|\vec{V}|) u |\vec{V}|, \quad \tau_y = \rho C_p (|\vec{V}|) v |\vec{V}|$$

Известно, что эффективным численным методом решения задач гидродинамики является МАС - метод. В работе рассматривается вариант данного метода, известный как метод поправки к давлению. Данный метод представляет собой аддитивную схему расщепления по физическим процессам (передача импульса, расчет поля давления и уточнение поля скорости по давлению) и гарантирует выполнение баланса массы (уравнение неразрывности), являясь устойчивым.

В системе уравнений (9)-(15) вместо частных производных будем использовать их конечноразностные аналоги, полученные при помощи интегро-интерполяционным метода. После чего задача сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений, которые решаются попеременно-треугольным итерационным методом градиентного спуска.

Результаты численных экспериментов представлены на Рис. 2.

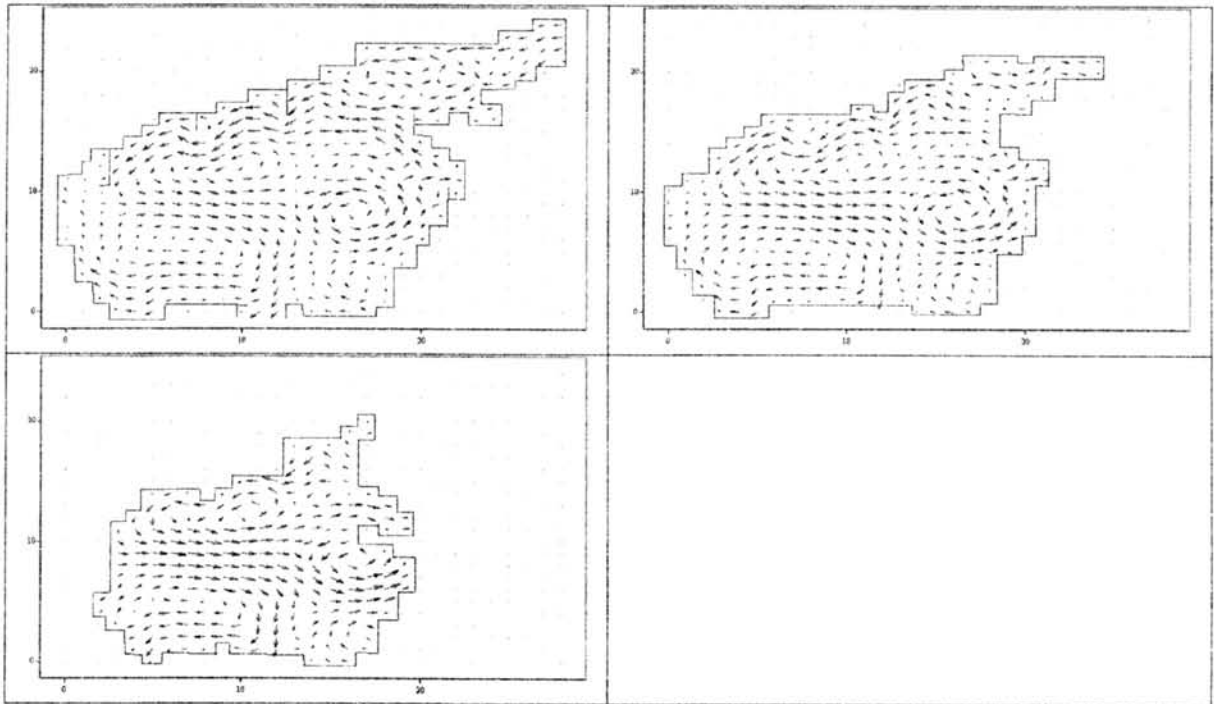


Рис. 2.

Векторы поля скорости при восточном ветре 5 м/с на глубине 0м, 5м и 8 м соответственно.

1. Ландау Л. Д., Лифшиц В. М. Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. - 733 с.
2. Лапин Ю. В., Стрелец М. Х. Внутренние течения газовых смесей. - М.: Наука, 1989. - 368 с.
3. Роуч П. Вычислительная гидродинамика.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1989.
5. Коновалов А. Н. К теории попеременно-треугольного итерационного метода. <http://www-sbras.nsc.ru/EMIS/journals/SMZ/2002/03/552.pdf>.

СХЕМА РАСЩЕПЛЕНИЯ ПО ФИЗИЧЕСКИМ ПРОЦЕССАМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ХОХЛОВА-ЗАБОЛОЦКОЙ-КУЗНЕЦОВА

Чистякова Т. А., Савицкий О. А.

Таганрогский технологический институт Южного федерального университета

Большинство технических приложений упругих волн связано с созданием волнового поля в виде пучков. Поле в виде ограниченных в пространстве волновых пучков создается практически во всех приборах и устройствах с применением упругих волн (дефектоскопия, медицинская диагностика, звуколокация).

Процесс распространения волновых пучков в квадратичных нелинейных диссипативных средах описывается уравнением Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова, которое, в обезразмеренном виде, выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial v}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} v, \quad (1)$$

где $v = v(z, \theta, r)$ - величина скорости частиц среды, Γ - диссипативный параметр, θ - фаза волны, z - расстояние, N - параметр уравнения, характеризующий соотношение нелинейности и дифракции, Δ_{\perp} - поперечный лапласиан

$$\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}.$$

Физически значимых точных решений уравнения Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова не получено, поэтому для изучения закономерностей распространения волновых пучков конечной амплитуды целесообразно применять математическое моделирование.

При разработке численной модели рассматриваемых волновых явлений отдается предпочтение методу расщепления по физическим процессам, так как двухслойная конечно-разностная схема, полученная путем замены частных производных их дискретными аналогами, не является устойчивой, а метод гармоник требует больших вычислительных затрат.

Будем решать задачу в два этапа. На первом шаге производится учет нелинейных и диссипативных процессов. На данном этапе происходит решение конечно-разностного аналога уравнения Бюргерса [1]:

$$\frac{\tilde{v} - v}{h_z} - v \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2)$$

Уравнение (2) решается при следующих граничных условиях (предполагается периодичность волнового процесса):

$$v(z, 0, r) = v(z, 2\pi, r), \quad (3)$$

$$v'_\theta(z, 0, r) = v'_\theta(z, 2\pi, r). \quad (4)$$

На втором шаге происходит уточнение поля скорости в волне с учетом дифракции, которая в принятом квазиоптическом приближении моделируется как процесс диффузии в направлении, перпендикулярном распространению волны:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\hat{v} - \tilde{v}}{h_z} \right) = \frac{N}{4} \Delta \hat{v}, \quad (5)$$

где h_z - шаг по пространству вдоль оси z , \tilde{v} - величина скорости частиц среды в поле волны на промежуточном временном слое, \hat{v} - величина скорости частиц среды на следующем временном слое.

$$v'_r(z, \theta, 0) = 0 \quad (6)$$

$$v(z, \theta, \infty) = 0 \quad (7)$$

Условие (6) отражает симметрию поля относительно оси z , а условие (7) - отсутствие источников поля в бесконечно удаленных от оси z точках пространства.

Конечно-разностная аппроксимация уравнения (2) с учетом граничных условий (3)-(4) происходит заменой непрерывных операторов на их конечно - разностные аналоги, полученные при помощи интегроинтерполяционного метода: