

Чистякова Т. А., Савицкий О. А.

**[СХЕМА РАСЩЕПЛЕНИЯ ПО ФИЗИЧЕСКИМ ПРОЦЕССАМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХОХЛОВА-ЗАБОЛОЦКОЙ-КУЗНЕЦОВА](#)**

Адрес статьи: [www.gramota.net/materials/1/2008/1/92.html](http://www.gramota.net/materials/1/2008/1/92.html)

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

**[Альманах современной науки и образования](#)**

Тамбов: Грамота, 2008. № 1 (8). С. 220-222. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: [www.gramota.net/editions/1.html](http://www.gramota.net/editions/1.html)

Содержание данного номера журнала: [www.gramota.net/materials/1/2008/1/](http://www.gramota.net/materials/1/2008/1/)

**[© Издательство "Грамота"](#)**

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: [www.gramota.net](http://www.gramota.net)

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: [almanac@gramota.net](mailto:almanac@gramota.net)

1. Ландау Л. Д., Лифшиц В. М. Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. - 733 с.
2. Лапин Ю. В., Стрелец М. Х. Внутренние течения газовых смесей. - М.: Наука, 1989. - 368 с.
3. Роуч П. Вычислительная гидродинамика.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1989.
5. Коновалов А. Н. К теории попеременно-треугольного итерационного метода. <http://www-sbras.nsc.ru/EMIS/journals/SMZ/2002/03/552.pdf>.

СХЕМА РАСЩЕПЛЕНИЯ ПО ФИЗИЧЕСКИМ ПРОЦЕССАМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
ХОХЛОВА-ЗАБОЛОЦКОЙ-КУЗНЕЦОВА

Чистякова Т. А., Савицкий О. А.

Таганрогский технологический институт Южного федерального университета

Большинство технических приложений упругих волн связано с созданием волнового поля в виде пучков. Поле в виде ограниченных в пространстве волновых пучков создается практически во всех приборах и устройствах с применением упругих волн (дефектоскопия, медицинская диагностика, звуколокация).

Процесс распространения волновых пучков в квадратичных нелинейных диссипативных средах описывается уравнением Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова, которое, в обезразмеренном виде, выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial v}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} v, \quad (1)$$

где  $v = v(z, \theta, r)$  - величина скорости частиц среды,  $\Gamma$  - диссипативный параметр,  $\theta$  - фаза волны,  $z$  - расстояние,  $N$  - параметр уравнения, характеризующий соотношение нелинейности и дифракции,  $\Delta_{\perp}$  - поперечный лапласиан

$$\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}.$$

Физически значимых точных решений уравнения Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова не получено, поэтому для изучения закономерностей распространения волновых пучков конечной амплитуды целесообразно применять математическое моделирование.

При разработке численной модели рассматриваемых волновых явлений отдается предпочтение методу расщепления по физическим процессам, так как двухслойная конечно-разностная схема, полученная путем замены частных производных их дискретными аналогами, не является устойчивой, а метод гармоник требует больших вычислительных затрат.

Будем решать задачу в два этапа. На первом шаге производится учет нелинейных и диссипативных процессов. На данном этапе происходит решение конечно-разностного аналога уравнения Бюргерса [1]:

$$\frac{\tilde{v} - v}{h_z} - v \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2)$$

Уравнение (2) решается при следующих граничных условиях (предполагается периодичность волнового процесса):

$$v(z, 0, r) = v(z, 2\pi, r), \quad (3)$$

$$v'_\theta(z, 0, r) = v'_\theta(z, 2\pi, r). \quad (4)$$

На втором шаге происходит уточнение поля скорости в волне с учетом дифракции, которая в принятом квазиоптическом приближении моделируется как процесс диффузии в направлении, перпендикулярном распространению волны:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\hat{v} - \tilde{v}}{h_z} \right) = \frac{N}{4} \Delta \hat{v}, \quad (5)$$

где  $h_z$  - шаг по пространству вдоль оси  $z$ ,  $\tilde{v}$  - величина скорости частиц среды в поле волны на промежуточном временном слое,  $\hat{v}$  - величина скорости частиц среды на следующем временном слое.

$$v'_r(z, \theta, 0) = 0 \quad (6)$$

$$v(z, \theta, \infty) = 0 \quad (7)$$

Условие (6) отражает симметрию поля относительно оси  $z$ , а условие (7) - отсутствие источников поля в бесконечно удаленных от оси  $z$  точках пространства.

Конечно-разностная аппроксимация уравнения (2) с учетом граничных условий (3)-(4) происходит заменой непрерывных операторов на их конечно - разностные аналоги, полученные при помощи интегроинтерполяционного метода:

$$v \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} = \begin{cases} v_{1/2} \frac{v_1 - v_0}{2\tau} + v_{n-1/2} \frac{v_0 - v_{n-1}}{2\tau}, & i = 0 \\ v_{i+1/2} \frac{v_{i+1} - v_i}{2\tau} + v_{i-1/2} \frac{v_i - v_{i-1}}{2\tau}, & 1 \leq i \leq n-2 \\ v_{n-1/2} \frac{v_0 - v_{n-1}}{2\tau} + v_{n-3/2} \frac{v_{n-1} - v_{n-2}}{2\tau} & i = n-1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \theta^2} = \begin{cases} \frac{v_1 - 2v_0 + v_{n-1}}{\tau^2}, & i = 0 \\ \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{\tau^2}, & 1 \leq i \leq n-2 \\ \frac{v_0 - 2v_{n-1} + v_{n-2}}{\tau^2} & i = n-1 \end{cases}$$

После дискретизации задача (2) - (4) решается методом прогонки с матрицей специального вида:

$$A = \begin{pmatrix} c_0 & -b_0 & 0 & & 0 & -a_0 \\ -a_1 & c_1 & -b_1 & & & 0 \\ 0 & -a_2 & c_2 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & c_{n-2} & -b_{n-2} & 0 \\ 0 & & & -a_{n-1} & c_{n-1} & -b_{n-1} \\ -b_n & 0 & & 0 & -a_n & c_n \end{pmatrix}$$

Решение уравнения (5) находится методом гармоник. Функцию скорости частиц среды  $v(z)$  можно разложить в ряд Фурье следующим образом:

$$v = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} c_n \exp(iwn\theta) \quad (8)$$

где  $w$  - частота первой гармоники,  $n$  - номер гармоники,  $N$  - количество дискретных значений величины скорости частиц среды на период.

Подставим выражение (8) в уравнение (5), получим:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{(\hat{c}_n - \bar{c}_n)}{h_z} \exp(iwn\theta) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \hat{c}_n \exp(iwn\theta)$$

Внесем операторы частных производных под знак суммы. В результате получим:

$$\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{(\hat{c}_n - \bar{c}_n)}{h_z} \exp(iwn\theta) \right) = \frac{N}{4} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \Delta_{\perp} \hat{c}_n \exp(iwn\theta)$$

Возьмем частную производную по  $\theta$ :

$$\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \left( iwn \frac{(\hat{c}_n - \bar{c}_n)}{h_z} \exp(iwn\theta) \right) = \frac{N}{4} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \Delta_{\perp} \hat{c}_n \exp(iwn\theta)$$

Так как функции  $\exp(iwn\theta)$  для различных  $n$  линейно независимы, то получим уравнение:

$$iwn \frac{(\hat{c}_n - \bar{c}_n)}{h_z} = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} \hat{c}_n \quad (9)$$

Данное уравнение описывает диффузию энергии для различных частот. Для него строится конечно-разностная схема и вычисляется спектр величины скорости волны на следующем временном слое. А величина скорости частиц среды считается по формуле:

$$\hat{v} = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \hat{c}_n^* \exp(iwn\theta)$$

$$\text{где } \hat{c}_n^* = \text{Re}(\hat{c}_n) - i \text{Im}(\hat{c}_n)$$

Таким образом, осуществляется переход на следующий временной слой.

Определим количество операций, необходимых для реализации предложенного метода расчета. Для решения задачи, представленной уравнением (2) с граничными условиями (3)-(4), требуется порядка  $O(N)$  арифметических операций, а для разложения величины скорости частиц среды по базису из тригонометри-

ческих функций, представленному уравнением (8), требуется  $O(N \log_2 N)$  арифметических операций. Для расчета уравнения (9) необходимо  $O(M)$  арифметических операций в одномерном случае, где  $M$  - количество узлов по пространству в направлении, перпендикулярном распространению волны. Таким образом, получаем общее число операций  $O(NM \log_2 N)$ .

Приведем результаты численного эксперимента для различных значений параметров  $N$  и  $\Gamma$ .

На Рис. 1 и Рис. 2 изображены зависимости скорости частиц среды от фазы волны для значений параметра  $z=0, z=0,5, z=1$  и  $z=2$  (более тонким линиям соответствуют более высокие значения  $z$ ). На Рис. 2 изображено изменение профиля волны в среде, в которой нелинейность преобладает над диффузией. На Рис. 1 изображено изменение профиля волны в среде, в которой диффузия преобладает над нелинейностью.

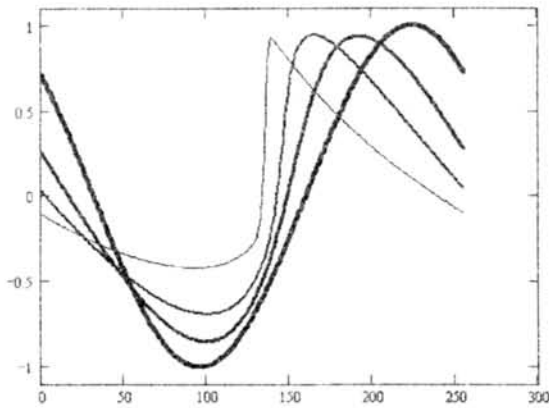


Рис. 1. Зависимость скорости частиц среды от фазы волны при  $N=0,5; \Gamma=0,01$

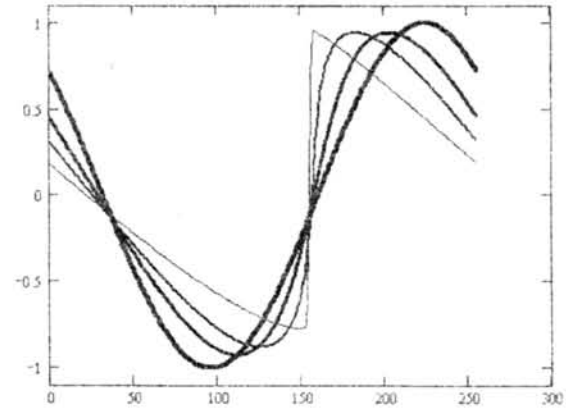


Рис. 2. Зависимость скорости частиц среды от фазы волны при  $N=0,1; \Gamma=0,01$

Список использованной литературы

1. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. - М.: Наука, 1979.
2. Самарский А. А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1989.

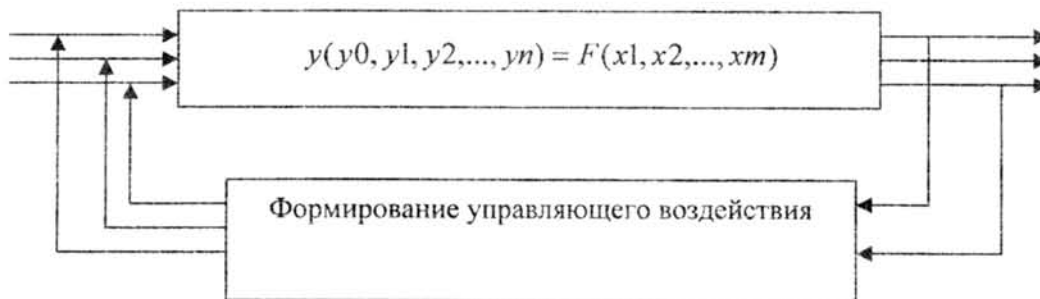
СТРУКТУРА И ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ АДАПТИВНОГО НЕЧЁТКОГО БАЙЕСОВСКОГО КОНТРОЛЛЕРА

Шамшев А. Б.

Ульяновский государственный технический университет

Задача чёткого контроля

В практической деятельности часто встречается задача о поддержании значений некоторых выходных параметров управляемого процесса. Выходные переменные процесса зависят от входных значений. Таким образом, контролируемый процесс выполняет функциональную зависимость  $y(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ . Как правило, количество выходных переменных меньше количества входных переменных.



На рисунке представлена схема контроллера процесса. В данном случае контролируемый процесс имеет три входных значения и три выходных значения. Первое и третье выходное значение являются измеримыми и контролируруемыми, а второе значение является неконтролируемым.

В общем случае контроллер представляет собой петлю обратной связи, целью которой является удержание контролируемых значений на заданном уровне. Формирование управляющего значения возможно постольку, поскольку существует функция обратного преобразования выходных значений во входные:

$$\Delta X = G(\Delta Y),$$