$$\sum_{m=1,3,..}^{\infty}\sum_{n=0,1,2,..}^{\infty}\frac{1}{\left(A^2m^2+n^2\right)^2+B}=\frac{0,71826}{A\sqrt{B}} \tag{27}$$

$$\sum_{m=1,3,..}^{\infty}\sum_{n=0,1,..}^{\infty}\frac{\left(A^2m^2+n^2\right)^2}{\left(A^2m^2+n^2\right)^4+\left(A^2m^2+n^2\right)^2B+A^4Cm^4}=\frac{\pi^2}{16A\sqrt{B+AC^{\frac{3}{4}}}} \tag{28}$$

Приведенные в Табл. 1, 2, 3 данные были использованы для получения аналитических формул, обеспечивающих быстрое определение прогибов и напряжений в поперечнонагруженной цилиндрической оболочке из ортотропного материала [Сойкин, 2004. с. 2-6]. Экспериментальные исследования подтвердили точность выполненных аналитических решений [Сойкин и др., 2004, с. 7-13].

Разработанная методология была использована для решения ряда практических задач, встречающихся в технологии машиностроения.

Выводы

1. Установлена реальная возможность и целесообразность аналитического решения дифференциальных уравнений четвертого и восьмого порядков в частных производных с переменными коэффициентами.

2. Разработана методология аналитического решения прикладных математических задач из области механики упруго деформируемого тела (пластин и оболочек).

3. Получены конечные математические формулы (Табл. 1-3), упрощающие процесс суммирования двойных тригонометрических рядов, содержащих алгебраические функции четвертого и восьмого порядков.

4. Достоверность и удовлетворительная точность вычислений по выведенным формулам подтверждена данными числовых и экспериментальных исследований [Сойкин и др., 2004, с. 7-13].

Заключение

Данные, приведенные в работе (Табл. 1-3) являются весомым дополнением к существующей справочно-технической литературе, которая используется в расчетах и проектировании современных образцов новой техники и технологии [Градштейн, Рыжик, 1971].

Общие вопросы из теории разложения алгебраических функций могут быть полезны для математиков-прикладников, вычислителей, механиков, инженеров-конструкторов, технологов, аспирантов и студентов вузов. Некоторые формулы из Табл. 1, 2 могут быть рекомендованы в качестве учебного материала для абитуриентов, практикующихся в задачах по теме: «Упростить выражение».

Разработанная автором методология аналитического решения прикладных задач механики деформируемого твердого тела проста и эффективна в статической постановке. Для решения более сложных задач динамики твердого тела потребуются еще более громоздкие математические выкладки, выходящие за рамки настоящей работы.

Список использованной литературы

1. **Вычислительные методы в механике разрушения /** под ред. С. Атлури; пер. с англ. А. С. Кравчука и Е. Г. Кузовкова. М.: Мир, 1990.392 с.

2. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

3. **Доннелл Л. Г.** Балки, пластины и оболочки / пер. с англ.; под ред. Э. И. Григолюка. М.: Наука; Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 568 с.

4. **Корн Т., Корн Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.

5. **Сойкин Б. М.** Актуальные проблемы механической обработки тонкостенных цилиндрических оболочек, выполненных из ортотропных материалов // Металлообработка. СПб.: Политехника, 2004. № 3 (21). С. 2-6.

6. **Сойкин Б. М. и др.** Влияние упругих деформаций тонкостенных цилиндрических оболочек из ортотропных материалов на точность и производительность механической обработки // Там же. № 5 (23). С. 7-13.

7. **Тимошенко С. П., Войновский-Кригер.** Пластинки и оболочки / пер. с англ.; под ред. Г. С. Шапиро. М.: Наука; Главная редакция физико-математической литературы, 1966. 636 с.

СРАВНЕНИЕ ДВУХ МЕТОДОВ ПРИБЛИЖЁННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Трофимова Наталья Федоровна
Сибирский федеральный университет

Сравниваются в двумерном случае результаты применения двух кубатурных формул: решетчатые кубатурные формулы ранга 1 с тригонометрическим d-свойством и весовых кубатурных формул в периодическом случае.

1. Введение и предварительные сведения

При приближенном вычислении интегралов возникает вопрос об оценке качества кубатурных формул. Под кубатурной формулой обычно понимают приближённое равенство вида

$$\int_{\Omega} f(x)w(x)dx \approx \sum_{j=1}^{N} c_j f\left(x^{(j)}\right),$$

где $f(x)$ - интегрируемая функции, Ω - область интегрирования, $x^{(j)}$ и c_j - узлы и коэффициенты (они не зависят от интегрируемой функции), $w(x)$ - фиксированная весовая функция.

Существуют различные критерии качества, удовлетворить которые можно за счет соответствующего выбора параметров кубатурной формулы - её узлов и коэффициентов.

Можно исходить из некоторого конечномерного пространства функций (например, алгебраических или тригонометрических многочленов). Согласно этому критерию, кубатурная формула считается тем лучше, чем большей является размерность пространства функций, на которых эта кубатурная формула является точной.

Можно так же требовать, чтобы кубатурная формула обеспечивала гарантированную оценку погрешности на всех функциях из данного бесконечномерного банахова пространства. С этой точки зрения лучше та кубатурная формула, для которой норма функционала погрешности, определяемого равенством

$$(l, f) = \int_{\Omega} f(x)w(x)dx - \sum_{j=1}^{N} c_j f\left(x^{(j)}\right),$$

имеет меньшую величину (т.е. кубатурная формула тем лучше, чем меньше по абсолютной величине значение её функционала погрешности «наихудшей» функции из пространства).

Будем рассматривать кубатурные формулы, точные на тригонометрических многочленах, при этом областью интегрирования будет n-мерный тор

$$\mathrm{T}_n = \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : 0 \le x_i < 1\right\}.$$

Тригонометрическим одночленом называется функция вида

$$f_\alpha(x) = \exp(2\pi i(\alpha, x)),$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in Z^n, \quad (\alpha, x) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n.$$

Тригонометрический многочлен $f(x)$ определяется как конечная линейная комбинация одночленов с комплексными коэффициентами. Степень тригонометрического одночлена $f_\alpha(x)$ по определению равна $\|\alpha\| = |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|$. Степень тригонометрического многочлена равна максимальной из степеней образующих его одночленов.

Говорят, что кубатурная формула обладает тригонометрическим d-свойством, если она точна для всех тригонометрических многочленов $f(x)$, степень которых не превосходит d.

Целью настоящей работы является сравнение в двумерном случае результатов применения двух кубатурных формул: решетчатых кубатурных формул ранга 1 с тригонометрическим d-свойством (см., например, [Осипов, 2005, с. 10]) и весовых кубатурных формул в периодическом случае [Половинкин, 1968, с. 320].

Решетчатые кубатурные формулы

Пусть $\Lambda \subset R^n$ - решетка интегрирования, т.е. n-мерная решетка, содержащая в себе решетку Z^n всех точек с целыми координатами. Через $\Lambda^\perp$ обозначим решетку, дуальную к решетке Λ. Матрицы A и B, порождающие решетки Λ и $\Lambda^\perp$ соответственно, связаны соотношением $B = \left(A^t\right)^{-1}$. Для решетки интегрирования Λ имеем $\Lambda^\perp \subset Z^n$.

Решетчатой кубатурной формулой с решеткой узлов Λ называется кубатурная формула вида

$$\int_{T_n} F(x)dx \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} F\left(x^{(j)}\right), \tag{1}$$

где $\left\{x^{(j)} : 1 \le j \le N\right\} = \Lambda \cap T_n, \quad N = \det\left(\Lambda^\perp\right) = |\det(B)|$.

Всякая решетчатая кубатурная формула (1) может быть записана в σ-циклической форме

$$\int_{T_n} F(x)dx \approx \frac{1}{N_1 \ldots N_\sigma}\sum_{j_1=1}^{N_1} \ldots \sum_{j_\sigma=1}^{N_\sigma} F\left(\left\{\frac{j_1 p^{(1)}}{N_1} + \ldots + \frac{j_\sigma p^{(\sigma)}}{N_\sigma}\right\}\right), \tag{2}$$

где $p^{(1)}, \ldots, p^{(\sigma)}$ - некоторые целочисленные векторы, $\{x\}$ означает взятие дробных частей от всех компонент вектора x. Запись в форме (2) не является однозначной; наименьшее возможное значение σ называется рангом решетчатой кубатурной формулы (1).

Решетчатая кубатурная формула ранга 1 имеет вид

$$\int_{T_n} F(x)dx \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} F\left(\left\{\frac{jp}{N}\right\}\right), \tag{3}$$

где $p = (p_1, \ldots, p_n)$ - порождающий вектор, удовлетворяющий условию $НОД(p_1, \ldots, p_n, N) = 1$.

Весовые кубатурные формулы в периодическом случае

Будем рассматривать периодические, с матрицей периодов H, функции $f(x)$ из пространства $\tilde{L}_2^{(m)}(H)$ (см., например, [Соболев, 1996, с. 55]).

Обозначим

$$B_t = \left\{\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n) \in Z^n : \left|\beta_i\right| \le t\right\},\ w_\beta = \int_{T_n} w(x)\exp(-2\pi i(\beta H^{-1},x))dx,$$

$$\left[S_t w\right](x) = \sum_{\beta\in B_t} w_\beta \exp(2\pi i(\beta H^{-1},x)).$$

Весовой кубатурной формулой будем называть (следуя [Половинкин, 1968, с. 321]) кубатурную формулу вида

$$\int_{T_n} f(x)w(x)dx \approx h^n \sum_{\beta\in B_t}\left[S_t w\right]\left(h\beta H\right) f\left(h\beta H\right), \tag{4}$$

где $h=(2t+1)^{-1}$, t - натуральное число.

2. Описание эксперимента

Пусть $n=2$ и $x=(x_1,x_2)$. В формуле (3) возьмём $p=(1, 2k+1)$, $N=2(k+1)$, где k - натуральное число. При таком выборе параметров решетчатая кубатурная формула (3) будет обладать тригонометрическим $(2k+1)$-свойством [Осипов, 2005, с. 11]. Матрицу периодов H в формуле (4) считаем единичной. В качестве интегрируемой функции берём

$$f(x) = \cos(2\pi(x_1+x_2)) + \cos(2\pi(2x_1+3x_2)) + \cos(2\pi(3x_1+2x_2)) + \cos(2\pi(4x_1+2x_2)) +$$
$$+\cos(2\pi(2x_1+4x_2)) + \cos(2\pi(5x_1+3x_2)),$$

при этом полагаем $F(x) = f(x)w(x)$ в формуле (3).

Эксперимент проводился для двух разных весовых функций-«шапочек» $w(x) = w_i(x)$:

$$w_1(x) = \begin{cases} v^{-1}\exp\left(-1/\left(r_1^2-r^2\right)\right), & \textit{если}\ r\le r_1,\\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases}$$

$$w_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp\left(-1/\left(r_2-r\right)\right)}{\exp\left(-1/\left(r_2-r\right)\right)+\exp\left(-1/r\right)}, & \textit{если}\ r\le r_2,\\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases}$$

Здесь $r^2 = (x_1-1/2)^2 + (x_2-1/2)^2$, параметры $r_1, r_2 \in (0, 1/2]$,

$$v = 2\pi\int_0^{r_1} r\exp\left(-1/\left(r_1^2-r^2\right)\right)dr.$$

Вычисления велись в системе компьютерной алгебры MAPLE 11 при значении параметра Digits=15. Процесс вычислений завершался по достижении погрешности 10^{-13}.

При применении формулы (4) необходимо вычислить $(2t+1)^2$ коэффициентов Фурье весовой функции $w(x)$ и, кроме того, проделать $(2t+1)^4$ операций сложения; формула (3) требует $2(k+1)^2$ операций сложения.

При вычислении интеграла по формуле (4) большая часть времени уходит на вычисление коэффициентов Фурье, но, с другой стороны, их достаточно вычислить всего лишь один раз (для фиксированной весовой функции), и тогда процесс вычисления данной формулой заметно сокращается, причем если коэффициенты ряда Фурье весовой функции известны заранее, то затрачивается одинаковое количество времени на приближенное вычисление интеграла по каждой из рассматриваемых формул.

Результаты эксперимента представлены в Таблицах 1-4.

Табл. 1. *Формула (4),* $w(x) = w_1(x)$

		число слагаемых	погрешность
0,5	3	2401	10^{-14}
0,4	6	28561	10^{-13}
0,3	6	28561	10^{-13}
0,2	6	28561	10^{-13}

Табл. 2. *Формула (3),* $w(x) = w_1(x)$

		число слагаемых	погрешность
0,5	51	5408	10^{-13}
0,4	51	5408	10^{-13}
0,3	51	5408	10^{-13}
0,2	81	13448	10^{-13}

Табл. 3. *Формула (4),* $w(x) = w_2(x)$

		число слагаемых	погрешность
0,5	6	28561	10^{-13}
0,4	6	28561	10^{-13}
0,3	6	28561	10^{-13}
0,2	6	28561	10^{-13}

Табл. 4. *Формула (3),* $w(x) = w_2(x)$

		число слагаемых	погрешность
0,5	49	5000	10^{-13}
0,4	49	5000	10^{-13}
0,3	85	14792	10^{-13}
0,2	187	70688	10^{-13}

Список использованной литературы

1. **Осипов Н. Н.** О минимальных кубатурных формулах с тригонометрическим d -свойством в двумерном случае // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. № 1. Т. 45. С. 8-16.
2. **Половинкин В. И.** Весовые кубатурные формулы в периодическом случае // Матем. заметки. 1968. № 3. Т.3. С. 319-326.
3. **Соболев С. Л., Васкевич В. Л.** Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996. 484 с.

ПОИСК АЛЬТЕРНАТИВНЫХ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ СТОКСА

Устинова Людмила Геннадьевна
Филиал ГОУ ВПО «Московский энергетический институт» в г. Волжском

В настоящее время в вычислительной гидродинамике существует большое количество программных продуктов, которые в качестве модели жидкости используют различные дискретные аналоги уравнений переноса вещества, энергии, импульса. Сама модель представляет собой сеточное (разностное) приближение соответствующих дифференциальных уравнений. При этом, конечно, точность подобного приближения тем больше, чем больше количество клеток.

Чтобы замкнуть систему уравнений для всех сеточных объемов, необходимо добавить значения вектора напряжения и теплового потока на стенке, выраженные через соответствующие значения сеточных функций. Причем, во многом эффективность полученной системы определяется именно тем, как этот метод замыкания был применен.

В данной статье идет речь о поиске подсеточной модели пристеночного слоя в неньютоновских средах. Использование этой модели представляет собой альтернативу методу пристеночных функций. Последний основан на допущении, что вектор касательных напряжений $\vec{\tau}$ не зависит от расстояния до стенки.

Отказ от подобного допущения и использование более реалистичных зависимостей $\vec{\tau}(y)$ представляют собой основу метода пристеночных и пограничных слоев, у которых область применения существенно шире, чем у метода пристеночных функций. Практическая реализация всех разработанных моделей сводится к численному решению систем нелинейных уравнений. В качестве коэффициентов в них используются определенные интегралы, значения которых не представляется возможным вычислить аналитически - допустимы только численные методы. Этот подход и называется подсеточным разрешением.