5. **Лобанов И. Е.** Точное решение задачи о теплообмене в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био // Труды IV Российской национальной конференции по теплообмену: в 8 т. М.: МЭИ, 2006. Т. 2. Вынужденная конвекция однофазной жидкости. С. 187-190.
6. **Лобанов И. Е.** Точное решение задачи о теплообмене в каналах в нестационарных условиях при малых значениях числа Био // Труды VI Минского международного форума по тепломассообмену. Минск, 2008. Секция № 1. Конвективный тепломассообмен. Доклад № 1-40. С. 1-8.
7. **Нестационарный теплообмен** / В. К. Кошкин, Э. К. Калинин, Г. А. Дрейцер, С. А. Ярхо. М.: Машиностроение, 1973. 328 с.
8. **Теория тепломассообмена** / под ред. А. И. Леонтьева. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1997. 683 с.
9. **Хаузен Х.** Теплопередача при противотоке, прямотоке и перекрёстном токе. М.: Энергоиздат, 1981. 384 с.
10. **Anzelius A.** Über Erwärmung vermittels durchströmender Medien // Z. angew. Math. Mech. 1926. Bd. 6. S. 291.
11. **Kalinin E. K., Dreitser G. A.** Unsteady convective heat transfer in channels // Advances in heat transfer. New York: Academic Press, 1994. V. 25. P. 1-150.
12. **Nußelt W.** Der Wärmeübergang im Kreuzstrom // Z. VDI. 1911. Bd. 55. S. 2021-2024.
13. **Nußelt W.** Die Theorie des Winderhitzers // Z. VDI. 1927. Bd. 71. S. 85.
14. **Nußelt W.** Ein neue Formel für den Wärmeübergang Kreuzstrom // Techn. Mech. u. Therm. 1930. Bd. 1. S. 417-422.
15. **Schumann T. E. W.** Heat transfer: a liquid flowing through a porous prism // J. Franklin Inst. 1929. V. 208. P. 405.

О ТОЧЕЧНЫХ АТТРАКТОРАХ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ

Ляпин Андрей Сергеевич
МАТИ им. Циолковского

Ниже исследуется поведение решений уравнения реакции-диффузии в $\circ^n$ при $t\to\infty$. Предполагается, что реакция идёт на замкнутой области Ω, компактной в $\circ^n$. На дополнении множества Ω до $\circ^n$ рассматриваемое уравнение совпадает с линейным уравнением диффузии. Цель настоящей работы – доказать сходимость решений при $t\to\infty$ к стационарным решениям. Те из них, которые являются предельными для решений основного уравнения, имеют ряд интересных свойств, изучение которых также является предметом настоящей работы.

Изучаемое уравнение и начальное условие для него имеет следующий вид:

$$u_t + f(u;x) = \Delta u, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0 \in H_0^1 \cap L_P(\Omega). \tag{2}$$

где $x\in \circ^n$ и $f(v;x)\neq 0$, если $x\in\Omega$ и $f(v;x)=0$, когда $x\notin\Omega$. Функция $f(v;x)$ может, например, иметь вид $f(v;x)=f(v)\chi_\Omega(x)$, где χ_Ω – характеристическая функция множества Ω. При этом, $f(v;x)= f(v)$ если $x\in\Omega$, и $f(v;x)=0$ в противном случае. Предполагается, что $f(v;x)$ непрерывна по v и удовлетворяет условиям:

$$C_1|v|^p - C_2 \le f(v;x)\, v \le C_3|v|^p + C_4 \tag{3}$$

$$\frac{\partial f(v;x)}{\partial v} \ge -C. \tag{4}$$

$$\left|\frac{\partial f(v;x)}{\partial v}\right| \le C\,|v|^{p-2} \tag{5}$$

Рассматривается семейство функций $u^{(M)}(x;t)$, являющихся решениями задачи.

$$u_t^{(M)} + f(u^{(M)};x) = \Delta u^{(M)};\ x\in B_M,\ u^{(M)}\big|_{t=0} = u_0,\ u^{(M)}\big|_{\partial B_M} = 0, \tag{6}$$

где, в отличие от (1), (2) $x\in B_M$ - шару радиуса $M_0 + M$, с центром $x=0$. Число M_0 такое, что шар радиуса M_0 с центром в $x=0$ включает в себя Ω. Такой выбор M_0 возможен, так как Ω компакт в $\circ^n$. Очевидно, что шар B_{M_1} вложен в B_{M_2}, если только $M_1 \le M_2$. Имеет место следующее утверждение.

<u>Утверждение 1</u>: Для любых $T>0$, $\tau\in(0;T)$ и $k\ge 0$ существует $s\in[0;\tau)$ такое, что $u^{(M)}(x;t)$ и $u_t^{(M)}$ равномерно по M ограничены в $L_\infty([s;T];\, L_{k+2}(B_M)) \cap L_2([s;T];H^1(B_M))$.

Здесь пространство $H^1(B_M)$ определяется своей нормой:

$$||u||^2 = \int_{B_M} (|\nabla u|^2 + u^2)\, dx$$

<u>Доказательство</u>: Умножим (6) на $u_t^{(M)}$ и проинтегрируем по x на B_M:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|\nabla u^{(M)}\|^2_{L_2(B_M)} + \int_\Omega F(u^{(M)};x)d^n x\Big) + \|u_t^{(M)}\|^2_{L_2(B_M)} = 0\,. \tag{7}$$

Отсюда следует, что:

$$\Big(\frac{1}{2}\|\nabla u^{(M)}\|^2_{L_2(B_M)} + \int_\Omega F(u^{(M)};x)d^n x\Big)\Big|_0^T + \int_0^T \|u_t^{(M)}\|^2_{L_2(B_M)} dt = 0\,. \tag{8}$$

Умножив (6) на $|u^{(M)}|^k u^{(M)}$, проинтегрировав по x и по t на $B_M\times[t_0;T]$, получим:

$$\left(\frac{1}{k+2}\|u^{(M)}\|^{k+2}_{L_{K+2}(B_M)}\right)\Bigg|_{t_0}^{T}+\int_{t_0}^{T}\int_{\Omega}(f(u^{(M)};x)\,|u^{(M)}|^k\,u^{(M)}+(k+1)\,|u^{(M)}|^k\,(\nabla u^{(M)})^2)d^n x dt=0\,.$$

Так как $|u^{(M)}|^k(\nabla u^{(M)})^2=\dfrac{4}{(k+2)^2}\,(\nabla(u^{(M)})^{(k+2)/2})^2$ и $f(v;x)|v|^k v\ge C_1|v|^{k+p}-C_2|v|^k$, поэтому:

$$\frac{\|u^{(M)}\|^{k+2}_{L_{K+2}(B_M)}}{k+2}\Bigg|_{t_0}^{T}+\int_{t_0}^{T}(C_1\|u^{(M)}\|^{k+p}_{L_{K+P}(\Omega)}-C_2\|u^{(M)}\|^{k}_{L_K(\Omega)}+\frac{4(k+1)}{(k+2)^2}\|(u^{(M)})^{\frac{k+2}{2}}\|^2_{H_0^1(B_M)})dt\le 0 \tag{9}$$

В частности, для k=0 и t_0=0 имеем:

$$\frac{\|u^{(M)}\|^{2}_{L_2(B_M)}}{2}\Bigg|_{0}^{T}+C_1\int_0^T\|u^{(M)}\|^p_{L_p(\Omega)}dt-\int_0^T C_2\,|\Omega|dt+\int_0^T\int_{B_M}(\nabla u^{(M)})^2 d^n x dt\le 0 \tag{10}$$

Пусть $v=\dfrac{\partial u^{(M)}}{\partial t}$. Продифференцируем уравнение (6) по t, имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial f(u^{(M)};x)}{\partial u^{(M)}}v=\Delta v\,. \tag{11}$$

Аналогично (9), для уравнения (11) из (3) – (5) следует, что:

$$\frac{\|v\|^{k+2}_{L_{K+2}(B_M)}}{k+2}\Bigg|_{t_0}^{T}-C\int_{t_0}^{T}\|v\|^{k+2}_{L_{K+2}(\Omega)}dt+\frac{4(k+1)}{(k+2)^2}\int_{t_0}^{T}\int_{B_M}(\nabla(v)^{\frac{k+2}{2}})^2 d^n x dt\le 0\,. \tag{12}$$

Из (8) следует, что v равномерно по M ограничено в $L_2([0;T];\,L_2(B_M))$, поэтому для любого $\tau>0$ существует $t_0\in[0;\tau)$ такое, что $v(x;t_0)\in L_2(B_M)$, и при k=0 получим:

$$\frac{\|v\|^{2}_{L_2(B_M)}}{2}\Bigg|_{t_0}^{T}-C\int_{t_0}^{T}\|v\|^{2}_{L_2(\Omega)}dt+\int_{t_0}^{T}\int_{B_M}(\nabla v)^2 d^n x dt\le 0\quad 0\le t_0<\tau\,. \tag{13}$$

Из (10) и (13) следует, что $u^{(M)}(x;t)$ и v равномерно по M ограничены в пространстве $L_\infty([t_0;T];L_2(B_M))\cap L_2([t_0;T];H^1(B_M))$.

Далее утверждение доказывается по индукции. Пусть $k\ge 0$ и $t_2\in[0;\tau)$ такие, что $u^{(M)}(x;t_2)$ и $v(x;t_2)$ равномерно по M ограничены в $L_{k+2}(B_M)$. Из (9) и (12) следует, что функции $(u^{(M)})^{(k+2)/2}$ и $v^{(k+2)/2}$ равномерно по M ограничены в $L_2([t_2;T];H^1(B_M))$. Отсюда и из теоремы вложения Соболева следует, что $u^{(M)}(x;t)$ и v равномерно по M ограничены в $L_2([t_2;T];\,L_{\frac{(k+2)n}{n-2}}(B_M))$. Поэтому существует число $t_3\in[t_2;\tau)$ такое, что функции $u^{(M)}(x;t_3)$ и $v(x;t_3)$ равномерно по M ограничены в $L_{\frac{(k+2)n}{n-2}}(B_M)$. Ограниченность в промежуточных пространствах $L_p(B_M)$ получается интерполяцией между $L_{k+2}(B_M)$ и $L_{\frac{(k+2)n}{n-2}}(B_M)$. Отсюда следует, что для любого $\tau>0$ существует $s\in[0;\tau)$ такое, что $u^{(M)}(t_2)$ и $v(t_2)$ равномерно по M ограничены в $L_\infty([s;T];L_{k+2}(B_M))\cap L_2([s;T];H^1(B_M))$. Обоснование полученных здесь результатов проводится методом Галёркина. Утверждение доказано.

Утверждение 2: Функции $u^{(M)}$ и $u_t^{(M)}$ стремятся к u и u_t соответственно при $M\to\infty$ в $C_{loc}(\circ\ ^n)$, u и u_t равностепенно непрерывны по t и принадлежат $L_{2;loc}(\circ\ _+;H^{1;\,loc}(\circ\ ^n))$.

Доказательство: Согласно утверждению 1 $u^{(M)}(x;t_k)\to u^{(M)}(x;t_0)$ при $t_k\to t_0$, в $L_2(B_M)$, так как:

$$\|u^{(M)}(x;t_k)-u^{(M)}(x;t_0)\|=\|\int_{t_0}^{t_k}u_t^{(M)}(x;t)\,dt\|\le|\int_{t_0}^{t_k}\|u_t^{(M)}(x;t)\|\,dt|. \tag{14}$$

Кроме того, $u^{(M)}$ равномерно по M ограничены в $L_\infty([s;T];L_{n(p-1)/2}\cap L_{2(p-1)}(\Omega))$, а $u_t^{(M)}$ и v_t в $L_\infty([s;T];L_{n/2}\cap L_2(B_M))$. Отсюда и из (6) и (11) следует, что $\Delta u^{(M)}$ и $\Delta u_t^{(M)}$ равномерно по M ограниченны в $L_\infty([s;T];L_{n/2}\cap L_2(B_M))$. По теореме вложения Соболева в $C(B_M)$ компактны замыкания семейств $u^{(M)}$ и $u_t^{(M)}$. Ещё из (15) и ограниченности $u_t^{(M)}$ и v_t следует равностепенная по t непрерывность $u^{(M)}$ и $u_t^{(M)}$. Для фиксированного 0<N, компактное в $C_{loc}((0;T];C(B_N))$ семейство $u^{(M)}(x;t)$ имеет предел $u(x;t)$ при $M\to\infty$. Аналогично этому и $u_t^{(M)}(x;t)$ стремится к u_t, и u_t и u принадлежат $C(B_N)$. Поэтому слабо в $L_{2;loc}(\circ\ ^n\times(0;T])$:

$$\begin{array}{ccccc}\Delta u^{(M)}(x;t) & - & f(u^{(M)}(x;t);x) & = & u_t^{(M)}(x;t)\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\ \Delta u(x;t) & - & f(u(x;t);x) & = & u_t(x;t)\end{array}$$

Из равномерной ограниченности $u_t^{(M)}$ в $L_2([s;T];H^1(B_M))$ следует, что существует предел при $M\to\infty$ в слабой топологии $L_{2;loc}({}^\circ{}_+;H^{1;\,loc}({}^\circ\,{}^n))$. Утверждение доказано.

Из утверждений 1 и 2 следует, что уравнение (1) представимо в виде:

$u_t + f(u;x) = \Delta u;\ x\in\Omega.$

$u_t = \Delta u;\ x\in {}^\circ\,{}^n\backslash\Omega.$

$u\big|_{\partial\Omega} = \phi(x;t)\in C((0;T]\times\partial\Omega)$.

Если в (1) $u(x;t)$ не зависит от t, то получается стационарное уравнение:

$$\Delta\overline{u}(x) = f(\overline{u}(x);x) \qquad (15)$$

<u>Утверждение 3</u>: Существует функция $\Phi(t)$, такая, что если $u(x;t)$ решение (1), то $\Phi(t)$ убывает. Если $u(x;t)$ решение (15) то $\frac{d}{dt}\Phi(t)=0$.

<u>Доказательство</u>: Определим функцию $\Phi(t)$ по формуле:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L_2}^2 + \int\limits_\Omega F(u;x)d^n x \qquad (16)$$

Здесь и далее через L_2 обозначается $L_2({}^\circ\,{}^n)$. Из (16) по аналогии с (7) выводим:

$$\frac{d}{dt}\Phi + \|u_t\|_{L_2}^2 = 0\ ,$$

Проинтегрировав это равенство по t на $[t_1;t_2]$, получим:

$$\forall t_2 > t_1 \geq 0 \qquad \Phi\big|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2}\|u_t\|_{L_2}^2 d\tau = 0$$

Отсюда следует, что $\Phi(t)$ убывает и $\frac{d}{dt}\Phi = 0$ тогда и только тогда, когда $\|u_t\|_{L_2}^2$ =0, а $u(x;t)$ решение (15). Утверждение доказано.

Решения $u(x;t)$ уравнения (1) в некотором смысле сходится при $t\to\infty$ к решению уравнения (15). Сформулируем точное утверждение.

<u>Утверждение 4</u>: $u(x;t)\to\overline{u}(x)$ при $t\to\infty$ в $H^{2;loc}({}^\circ\,{}^n)$. Для решений уравнения (15), верно равенство $\frac{d}{dt}\Phi = 0$ и неравенство: $\Phi(u(x;t))\geq\Phi(\overline{u}(x))$.

<u>Доказательство</u>: Из (3) следует, что $F(v;x)\geq -C$, поэтому: $\forall T>0\ \int\limits_0^T \|u_t\|_{L_2}^2\ dt \leq \Phi(u_0) + C|\Omega|$

Отсюда следует, что для любого $T>0$, $\int\limits_t^{t+T}\|u_t\|_{L_2}^2\ ds\to 0$ при $t\to\infty$. Поэтому существует последовательность $t_k\to\infty$ такая, что $u_t(x;t_k)\to 0$ в $L_2({}^\circ\,{}^n)$. Пусть последовательность $\tilde{t}_k\to\infty$ такая, что $u_t(x;\tilde{t}_k)$ ограничена в $H^{1;\,loc}({}^\circ\,{}^n)$. Тогда в $L_2({}^\circ\,{}^n)$

$$\begin{array}{lll} \Delta u(x;\tilde{t}_k) + f(u(x;\tilde{t}_k);x) = u_t(x;\tilde{t}_k) & \qquad & \Delta u(x;t_k) + f(u(x;t_k);x) = u_t(x;t_k) \\ \downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\qquad \downarrow & & \downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \\ \Delta\tilde{u}(x) \quad + \quad f(\tilde{u}(x);x) = \chi(x) & & \Delta\overline{u}(x) \quad + \quad f(\overline{u}(x);x) \quad = \quad 0 \end{array}$$

Очевидно, что:

$$\|u(x;t_k) - u(x;\tilde{t}_k)\| = \|\int\limits_{\tilde{t}_k}^{t_k} u_t(x;t)dt\| \leq \int\limits_{\tilde{t}_k}^{t_k}\|u_t(x;t)\|dt \to 0\ .$$

Отсюда $\overline{u}(x) = \tilde{u}(x)$, поэтому $\chi(x) = 0$, причём последнее равенство имеет место для любой последовательности $\tilde{t}_k\to\infty$ в силу равностепенной по t непрерывности u_t и её ограниченности в $L_{2;loc}({}^\circ{}_+;H^{1;\,loc}({}^\circ\,{}^n))$. Наконец, из утверждения 3 следует убывание $\Phi(u(x;t))$ и неравенство: $\Phi(u(x;t))\geq\Phi(\overline{u}(x))$.

Утверждение доказано.

Исследуем более подробно следствия сделанных выше утверждений в случае, когда размерность пространства n=1; 2; 3.

***n*=1**

Теорема 1: Пусть $x \in \circ^{1}$ в уравнениях (1) и (15), Ω есть отрезок $[a;b]$. Тогда решение (1) $u(x;t)$ стремится к решению (15) $\overline{u}(x)$ при $t\to\infty$, и интеграл $\int\limits_a^b f(\overline{u};x)dx$ равен нулю.

Доказательство: Уравнение (15) в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\overline{u}}{dx^2} = 0; & x < a \\ \dfrac{d^2\overline{u}}{dx^2} = f(\overline{u};x); & a \le x \le b \\ \dfrac{d^2\overline{u}}{dx^2} = 0; & b < x \end{cases}$$

Решением этого уравнения является семейство функций следующего вида:

$$\overline{u} = \begin{cases} c_1 x + c_2; & x<a \\ \varphi(x); & a \le x \le b \\ c_3 x + c_4; & b<x \end{cases}$$

Здесь $\varphi(x)$ определяется следующим образом:

$$\begin{cases} \phi(a) = c_1 a + c_2 \\ \phi^{/}(a) = c_1 \\ \dfrac{d^2\phi}{dx^2} = f(\phi;x) \end{cases}$$

а c_3 и c_4 определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} bc_3 + c_4 = \phi(b) \\ c_3 = \phi^{/}(b) \end{cases}$$

Тем самым задание c_1 и c_2 определяет вид функции $\overline{u}(x)$. Нам ещё известно, что $\Phi(\overline{u}(x))$ ограничено (см. утверждение 3), следовательно, ограничена сумма:

$$\Phi(\overline{u}) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{a} |c_1|^2\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left|\frac{d\phi}{dx}\right|^2 dx + \int\limits_a^b F(\phi;x)dx + \frac{1}{2}\int\limits_b^{+\infty} |c_3|^2\, dx$$

Эта сумма конечна, если $c_1 = c_3 = 0$. Окончательно получаем выражения для $\varphi(x)$.

$$\begin{cases} \phi^{/}(a) = 0 \\ \phi^{/}(b) = 0 \\ \dfrac{d^2\phi}{dx^2} = f(\phi;x) \end{cases} \quad \text{и} \quad \overline{u} = \begin{cases} \phi(a); & x < a \\ \phi(x); & a \le x \le b \\ \phi(b); & b < x \end{cases}$$

Проинтегрировав уравнение (15) на Ω, получим:

$$\left.\frac{d\overline{u}}{dx}\right|_a^b = \int\limits_a^b f(\overline{u};x)dx$$

Следовательно интеграл $\int\limits_a^b f(\overline{u})dx$ равен нулю. Теорема доказана.

***n*=2**

Теорема 2: Пусть уравнения (1) и (15) заданы в $\circ^{2}$, а Ω - компактная область в $\circ^{2}$. Тогда решение уравнения (1) $u(x;t)$ стремится к решению уравнения (15) $\overline{u}(x)$, которое, в свою очередь, при $x\to\infty$, стремится к u_∞. Интеграл $\int\limits_\Omega f(\overline{u})dx$ равен нулю.

Доказательство: Пусть $g(x)=f(\overline{u}(x);x)$. Уравнение (15) представим в виде:

$$\Delta\overline{u} = g(x); \tag{19}$$

Решение уравнения (19) ещё удовлетворяет условию $\Phi(\overline{u}) < \infty$. Проинтегрируем это уравнение во всём пространстве $\circ^{2}$:

$$\int\limits_{R^2} \Delta\overline{u} d^2x = \lim_{M\to\infty} \int\limits_{\partial B_M} \nabla\overline{u} dS = \lim_{M\to\infty} \int\limits_{B_M} g(x) d^2x = \int\limits_\Omega g(x) d^2 x \tag{20}$$

Общее решение уравнения (19) в ° $^{2}\backslash B_M$ даётся следующей формулой:

$$\bar{u}(x) = C\ln|x| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x^2 - M^2}{|\xi - x|^2}\phi(\alpha)d\alpha \qquad (21)$$

где $\phi(\alpha) = \bar{u}|_{\partial B_M}$. В силу конечности $\Phi(\bar{u})$ постоянная C равна нулю, и выражение (21) можно переписать в следующем виде:

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x^2 - M^2 - |\xi - x|^2}{|\xi - x|^2}\phi(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\alpha)d\alpha = \bar{u}_\infty + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2 < \xi; x > -2M^2}{|\xi - x|^2}\phi(\alpha)d\alpha$$

Таким образом $\bar{u}(x) = \bar{u}_\infty + O(\frac{1}{|x|})$, а $\nabla\bar{u} = O(\frac{1}{|x|^2})$. Для нахождения интеграла $\int_\Omega f(\bar{u}(x))d^2x$ воспользуемся равенством (20), и выразим $\int_\Omega f(\bar{u}(x))d^2x = \int_{\partial B_M}\nabla\bar{u}dx$. Так как $\left|\int_{\partial B_M}\nabla\bar{u}dx\right| \le \int_{\partial B_M}|\nabla\bar{u}|dx = O(\frac{1}{M}) \to 0$ то интеграл $\int_\Omega f(\bar{u}(x))d^2x = 0$. Теорема доказана.

***n*=3**

Теорема 3: Пусть уравнения (1) и (2) заданы в ° ^{3}, а Ω - компактная область В ° ^{3}. Тогда решение уравнения (1) $u(x;t)$ стремится к решению уравнения (2) $\bar{u}(x)$, которое, в свою очередь, при $x\to\infty$, стремится к 0.

Доказательство: Рассмотрим “срезающую функцию” $\Psi(x;t)$ такую, что

$$\Psi_t - k\chi_\Omega(x) = \Delta\Psi \qquad (22)$$

$$\Psi|_{t=0} = u|_{t=0} = u_0 \to 0 \text{ при } |x| \to \infty$$

Постоянная k определяется из следующего условия:

$$k + f(u;x) > 0 \qquad (23)$$

Наша цель заключается в том что бы показать, что решение уравнения (15) $\bar{u}(x) \to 0$ при $|x|\to\infty$. Пусть $\varphi=\Psi(x;t)$ - u вычтем теперь из уравнения (22) уравнение (1), в результате чего получим следующее равенство: $\phi_t = \Delta\phi + h(x;t)$

Так как $h(x;t) = (k + f(\bar{u};x))\chi_\Omega(x) \ge 0$ и $\varphi(x;0)=\Psi(x;0)-u_0(x)$ то, из принципа максимума мы получим, что $\varphi(x;t) \ge 0$. Решения неоднородного уравнения теплопроводности, так же как и решения уравнения (1) сходятся к решению стационарного уравнения при $t\to\infty$, имеющему следующий вид:

$$\Delta\bar{\Psi} = -k\chi_\Omega(x).$$

Решение уравнения Пуассона $\bar{\Psi}(x) = O(\frac{1}{|x|})$ и, следовательно, стремится к нулю. Так как $\bar{u}(x) \le \bar{\Psi}(x)$, а $\bar{\Psi}(x) \to 0$ при $|x|\to\infty$ то и $\bar{u}(x) \to 0$.

Теорема доказана.

Список литературы

1. **Бабин А. В., Вишик М. И.** Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
2. **Ляпин А. С.** Аттракторы параболического уравнения с нелинейностью в ограниченной области // Математические методы и приложения: труды Одиннадцатых математических чтений. М.: МГСУ, 2003.
3. **Komech A.** On stabilization of string-nonlinear oscillator interaction // J. Math. Anal. Appl. 1995. № 196. P. 384-409.
4. **Komech A.** On transitions to stationary states in one-dimensional nonlinear wave equations // Arch. Rat. Mech. Anal. 1999. № 149 (3). P. 213-228.
5. **Komech A., Joly P., Vacus O.** On transitions to stationary states in a Maxwell-Landau-Lifschitz-Gilbert system // SIAM J. Math. Anal. 1999. № 31 (2). P. 346-374.
6. **Komech A. I., Komech A. A.** Global well-posedness for the Schrodinger equation coupled to a nonlinear oscillator // Russ. J. Math. Phys. 2007. № 14 (2). P. 164-173.
7. **Zelik S. V.** The attractor for a nonlinear reaction-diffusion system in ° ^{n} and the estimation of its ε-entropy // Math. Notes. 1999. № 65 (6). P. 941-943.