

Ипатова Валентина Михайловна, Ипатов Дмитрий Евгеньевич

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ
ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ ОКЕАНА**

Адрес статьи: www.gramota.net/materials/1/2011/9/8.html

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

Альманах современной науки и образования

Тамбов: Грамота, 2011. № 9 (52). С. 25-29. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: www.gramota.net/editions/1.html

Содержание данного номера журнала: www.gramota.net/materials/1/2011/9/

© Издательство "Грамота"

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: www.gramota.net

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: almanac@gramota.net

Умножая (9) на z_1 и (10) на z_2 скалярно в L_2^0 и суммируя результаты, получаем соотношение

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|z\|_1^2 + \|z_2\|_2^2) + \|z\|_2^2 + \frac{\Sigma}{2} \|z_1 + z_2\|_1^2 + \|z_2\|_1^2 + \Sigma_1 \|z_2\|_2^2 =$$

$$= (J(z_1, u_1) + J(z_2, u_2), \Delta z_1) + (J(z_1, u_2) + J(z_2, u_1), \Delta z_2) - (J(z_1, u_2), z_2). \tag{11}$$

Оценим характерные нелинейные члены в правой части (11):

$$|(J(z_1, u_1), \Delta z_1)| \leq \|\nabla z_1\|_{L_4(S)} \|\nabla u_1\|_{L_4(S)} \|z_1\|_2 \leq c \|z_1\|_1^{1/2} \|z_1\|_2^{3/2} \|u\|_2 \leq \frac{c}{2} \|z_1\|_2^2 + c \|z_1\|_1^2 \|u\|_2^4,$$

$$|(J(z_1, u_2), z_2)| \leq \|z_1\|_1 \|\nabla u_2\|_{L_4(S)} \|z_2\|_{L_4(S)} \leq c \|z_1\|_1^2 \|u\|_2.$$

Таким образом, из (11) вытекает неравенство

$$\frac{d}{dt} (\|z\|_1^2 + \|z_2\|_2^2) \leq c \|z\|_1^2 (\|u\|_2^4 + \|u\|_2).$$

Используя лемму Гронуолла, заключаем, что $z = 0$.

Список литературы

1. Дымников В. П., Филатов А. Н. Основы математической теории климата. М.: ВИНТИ, 1994.
2. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

УДК 532.5

Валентина Михайловна Ипатова, Дмитрий Евгеньевич Ипатов
 Московский физико-технический институт

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ
 ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ ОКЕАНА ©

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы, АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/11133) и РФФИ (проект 09-01-00284-а).

Будем рассматривать прямоугольную область $\Omega = (0, L_x) \times (0, L_y)$, Γ - граница Ω , z - вертикальная координата, направленная вниз, $0 \leq z \leq H$, $H > 0$ - средняя глубина океана, $G = \Omega \times (0, H)$ - трехмерная область, $\Sigma = \Gamma \times [0, H]$ - боковая граница G , t - временная переменная, $t \in [0, T]$, где $0 < T < +\infty$, $G_t = G \times (0, T)$, $D = \Omega \times (0, T)$. Вектор скорости воды записывается в форме $U = (u, v, w)^o(u, w)$, где $u = \dot{x}$, $v = \dot{y}$, $w = \dot{z}$.

Введем дифференциальные операторы:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \text{div } \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \mathbf{u} \cdot \nabla = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla + w \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad A = -\Phi \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad A_u = A_v = A,$$

где под Φ понимаются компоненты скорости u , v , температура T и соленость S ; Φ, Φ - положительные постоянные, $u = v = \dots, u = v = \dots$.

Через $l = \text{const}$ обозначается параметр Кориолиса, $B = \begin{pmatrix} 0 & -l \\ l & 0 \end{pmatrix}$.

В области G_t рассмотрим систему уравнений гидротермодинамики океана в виде [5]:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + (A+B)\mathbf{u} + g\nabla \int_0^z dz' = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} + \operatorname{div} \int_0^H \mathbf{u} dz = 0, \quad (2)$$

$$\frac{dT}{dt} + A_T T = 0, \quad \frac{dS}{dt} + A_S S = 0, \quad (3)$$

$$= (T, S), \quad (4)$$

где ρ - плотность воды, $\rho_0 = \text{const} > 0$ - осредненное значение плотности, g - ускорение свободного падения, функция $w = w(\mathbf{u})$ в операторе полной производной по времени d/dt вычисляется по формуле $w = w(\mathbf{u}) = \operatorname{div} \int_z^H \mathbf{u} dz'$, $\eta = \eta(x, y, t)$ - возвышение уровня поверхности океана относительно невозмущенного состояния $z = 0$, направленное противоположно оси z .

Систему (1)-(4) дополним начальными условиями

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0, \quad \eta = \eta^0, \quad T = T^0, \quad S = S^0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (5)$$

и граничными условиями:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = -\frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho_0} + \frac{w(\mathbf{u})}{2} \mathbf{u} \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (6)$$

$$T \frac{\partial T}{\partial z} = \Psi_T(\Gamma_T)(T - T_s) + \frac{w(\mathbf{u})}{2} T \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (7)$$

$$S \frac{\partial S}{\partial z} = \Psi_S(\Gamma_S)(S - S_s) + \frac{w(\mathbf{u})}{2} S \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = H, \quad (9)$$

$$u = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = L_x, \quad (10)$$

$$v = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad \text{и} \quad y = L_y, \quad (11)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ - заданный вектор напряжения трения ветра, T_s, S_s - заданные усредненные значения температуры и солености на поверхности воды, Γ_T, Γ_S - заданные постоянные,

$$\Psi_T(\Gamma_T) = \begin{cases} \Gamma_T & \text{при} \quad \Gamma_T \geq 2r_T, \\ \frac{r_T^2}{(3r_T - \Gamma_T)} + r_T & \text{при} \quad \Gamma_T < 2r_T \end{cases} \quad (12)$$

и аналогично

$$\Psi_S(\Gamma_S) = \begin{cases} \Gamma_S & \text{при} \quad \Gamma_S \geq 2r_S, \\ \frac{r_S^2}{(3r_S - \Gamma_S)} + r_S & \text{при} \quad \Gamma_S < 2r_S \end{cases} \quad (13)$$

r_T, r_S - положительные постоянные. Из (12)- (13) вытекают неравенства $\Psi_T(\Gamma_T) \geq r_T, \Psi_S(\Gamma_S) \geq r_S$.

Введем в G сетку (x_i, y_j, z_m) , где $x_i = ih_x, i = 0, \dots, N_x + 1, h_x = L_x / (N_x + 1), y_j = jh_y, j = 0, \dots, N_y + 1, h_y = L_y / (N_y + 1), z_m = mh_z, m = 0, \dots, N_z, h_z = H / N_z$.

Пусть Δt - шаг сетки по времени, $t_k = k \Delta t, k = 0, \dots, K, K = T / \Delta t$.

Обозначим через u_{ijm}^k значение сеточной функции в узле (x_i, y_j, z_m, t_k) , u^k - сеточную функцию на k -ом слое по времени.

Динамическую модель (1)-(13) аппроксимируем системой конечно-разностных соотношений [1]:

$$\frac{\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}}{\Delta t} + A_h \mathbf{u}^k + g \nabla_h \cdot \mathbf{u}^{k-1} + g / \rho_0 \nabla_h \int_0^z \mathbf{u}^{k-1} dz' = -B \mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^{k-1} \nabla_h \mathbf{u}^{k-1} - w^{k-1} \partial_z \mathbf{u}^{k-1}, \quad (14)$$

$$\frac{\rho - \rho^{k-1}}{\Delta t} + \operatorname{div}_h \int_0^H \mathbf{u}^k dz = 0. \quad (15)$$

$$\frac{T^k - T^{k-1}}{h_T} + A_{hT} T^k = -\mathbf{u}^k \nabla_h T^{k-1} - w^k \partial_z T^{k-1}, \tag{16}$$

$$\frac{S^k - S^{k-1}}{h_S} + A_{hS} S^k = -\mathbf{u}^k \nabla_h S^{k-1} - w^k \partial_z S^{k-1}, \tag{17}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0, \quad \tau = 0, \quad T = T^0, \quad S = S^0 \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{18}$$

$$\partial_z \mathbf{u}^k = -\frac{\tau^k}{0} + \frac{w(\mathbf{u}^{k-1})}{2} \mathbf{u}^{k-1} \quad \text{при} \quad z = 0, \tag{19}$$

$${}_T \partial_z T^k = \Psi_T(\Gamma_T)(T^k - T_s) + \frac{w(\mathbf{u}^k)}{2} T^{k-1} \quad \text{при} \quad z = 0, \tag{20}$$

$${}_S \partial_z S^k = \Psi_S(\Gamma_S)(S^k - S_s) + \frac{w(\mathbf{u}^{k-1})}{2} S^{k-1} \quad \text{при} \quad z = 0, \tag{21}$$

$$u^k = \partial_x v^k = \partial_x T^k = \partial_x S^k = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = L_x, \tag{22}$$

$$v^k = \partial_y u^k = \partial_y T^k = \partial_y S^k = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad \text{и} \quad y = L_y, \tag{23}$$

где $A_h = -\Delta_h - \partial_{zz}$, аналогично $A_{hT} = -{}_T \Delta_h - {}_T \partial_{zz}$ и $A_{hS} = -{}_S \Delta_h - {}_S \partial_{zz}$,

$$(\Delta_h)_{ij} = \frac{i+1, j-2}{h_x^2} \frac{i, j}{h_y^2} + \frac{i-1, j}{h_x^2} + \frac{i, j+1-2}{h_y^2} \frac{i, j-1}{h_x^2},$$

$$(\partial_{zz})_{ijm} = \frac{ij, m+1-2}{h_z^2} \frac{ijm}{h_x^2} + \frac{ij, m-1}{h_z^2}, \quad \nabla_h = (\partial_x, \partial_y), \quad \text{div}_h \mathbf{u} = \partial_x u + \partial_y v,$$

$$(\partial_x)_i = \frac{i+1}{h_x}, \quad \text{аналогично} \quad \partial_y \quad \text{и} \quad \partial_z.$$

По переменным x и y используется дискретное преобразование Фурье, по переменной z применяется метод трехточечной прогонки.

Пусть в точках $(x_{i_n}, y_{j_n}, t_{k_n})$, $n = 1, \dots, N$, известны данные наблюдений за возвышением уровня свободной поверхности океана $\zeta_n = (x_{i_n}, y_{j_n}, t_{k_n})$ и за поверхностной температурой $M_n = T(x_{i_n}, y_{j_n}, 0, t_{k_n})$. Будем считать, что данные наблюдений должны быть использованы для отыскания неизвестного коэффициента Γ_T либо для отыскания неизвестного коэффициента Γ_S , в то время как все другие входные параметры модели известны и зафиксированы. Определим функционалы стоимости

$$J^T(\Gamma_T) = (\Gamma_T - \hat{\Gamma})^2 + h_x h_y \sum_{n=1}^N \left\{ {}_1 \left(\hat{\zeta}_{i_n, j_n}^{k_n} - \hat{\zeta} \right)^2 + {}_2 \left(\hat{T}_{i_n, j_n, 0}^{k_n} - M_n \right)^2 \right\}, \tag{24}$$

$$J^S(\Gamma_S) = (\Gamma_S - \hat{\Gamma})^2 + h_x h_y \sum_{n=1}^N \left\{ {}_1 \left(\tilde{\zeta}_{i_n, j_n}^{k_n} - \hat{\zeta} \right)^2 + {}_2 \left(\tilde{T}_{i_n, j_n, 0}^{k_n} - M_n \right)^2 \right\}, \tag{25}$$

где $\hat{\Gamma}$ - неотрицательный параметр регуляризации, $\Gamma_T^* > 0$ - некоторое априорно известное приближенное значение Γ_T , $\Gamma_S^* > 0$ - некоторое априорно известное приближенное значение Γ_S , ${}_1$ и ${}_2$ - неотрицательные весовые множители, $\hat{\zeta}, \hat{T}$ - решение конечно-разностной задачи (14)-(23), отвечающее данному значению Γ_T , $\tilde{\zeta}, \tilde{T}$ - решение задачи (14)-(23), отвечающее данному значению Γ_S .

Рассмотрим следующие дискретные задачи ассимиляции данных

1. Найти коэффициент $\Gamma_T \in R$ такой, что $J^T(\Gamma_T) = \inf \{ J^T(\Gamma_T), \Gamma_T \in R \}$.
2. Найти коэффициент $\Gamma_S \in R$ такой, что $J^S(\Gamma_S) = \inf \{ J^S(\Gamma_S), \Gamma_S \in R \}$.

Разрешимость этих задач в дифференциальной постановке доказана в работе [2]. Их численное решение сводится к поиску минимума функционалов стоимости (24) или (25), который проводится на основе метода Монте-Карло: случайным образом выбираются значения Γ_T из заданного диапазона, для каждого значения Γ_T вычисляется функционал J^T , затем методом перебора и сравнения находится оптимальное Γ_T , для которого J^T имеет наименьшее значение. Аналогично для задачи 2.

При проведении тестовых расчетов на ЭВМ, использовались следующие параметры модели:

$$L_x = 1000 \text{ км}; \quad L_y = 1000 \text{ км}, \quad H = 4 \text{ км},$$

$$\nu = 1.8 \text{ км}^2 / \text{час}, \quad \tau = \nu = 0.2 \text{ км}^2 / \text{час}, \quad \tau = \nu = 5 \cdot 10^{-6} \text{ км}^2 / \text{час}$$

$$\tau = (1.36 \cdot 10^{-3} \sin(2 \pi y / L_y), 0) \text{ км} / \text{час}^2, \quad N_x = N_y = 49, \quad N_z = 50 \quad \tau = 0.5 \text{ час},$$

$$T = 10 \text{ часов}, \Gamma_T^* = 2r_T = 8.3 \cdot 10^{-4}, \Gamma_S^* = 2r_S = 1.5 \cdot 10^{-3}, \\ = 1, \quad \alpha_1 = 10^{-3}, \quad \alpha_2 = 10^{-9}, \quad N = N_x N_y (K + 1) = 50421.$$

Плотность воды вычислялась по эмпирической формуле [3]

$$\frac{(S, T)}{c} = 0,97529 + 0,02737 \frac{S}{S_c} - 0,00006 \frac{T}{T_c} - 0,0014 \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 - 0,00119 \frac{ST}{S_c T_c},$$

где $\rho_c = 1,02541$, $T_c = 17,5^\circ \text{C}$, $S_c = 35\text{‰}$.

Использовались вертикальные профили температуры и солёности, полученные с помощью малоинерционного зонда для тропического района Атлантического океана 13 июня 1970 года [4]. Предполагалось, что с возрастанием глубины компоненты скорости убывают по параболическому закону:

$$u_0(x, y, z) = u_0(x, y, 0) \left(1 + a_1(z/H) + a_2(z/H)^2 \right),$$

$$v_0(x, y, z) = v_0(x, y, 0) \left(1 + a_3(z/H) + a_4(z/H)^2 \right).$$

Здесь $a_1 = -1.4$, $a_2 = 0.5$, $a_3 = -1.7$ и $a_4 = 0.8$.

Данные наблюдений задавались во всех внутренних точках горизонтальной сетки во все моменты времени. Массивы, задающие наблюдаемые величины, находились расчетом по модели при $\Gamma_T = \Gamma_T^*$ и $\Gamma_S = \Gamma_S^*$. На Рисунках 1, 2 приводятся результаты численных экспериментов, которые позволяют сделать заключение, что разработанный комплекс программ может быть использован для расчетов по ассимиляции данных наблюдений с целью определения неизвестных коэффициентов в рассматриваемой модели.

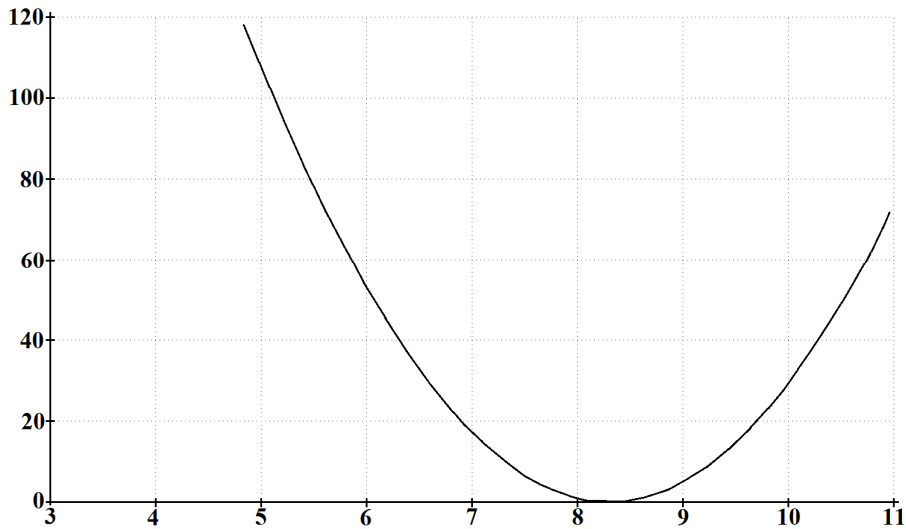


Рис. 1. Результат применения метода Монте-Карло: зависимость $J^T \cdot 10^{-6}$ от $\Gamma_T \cdot 10^4$

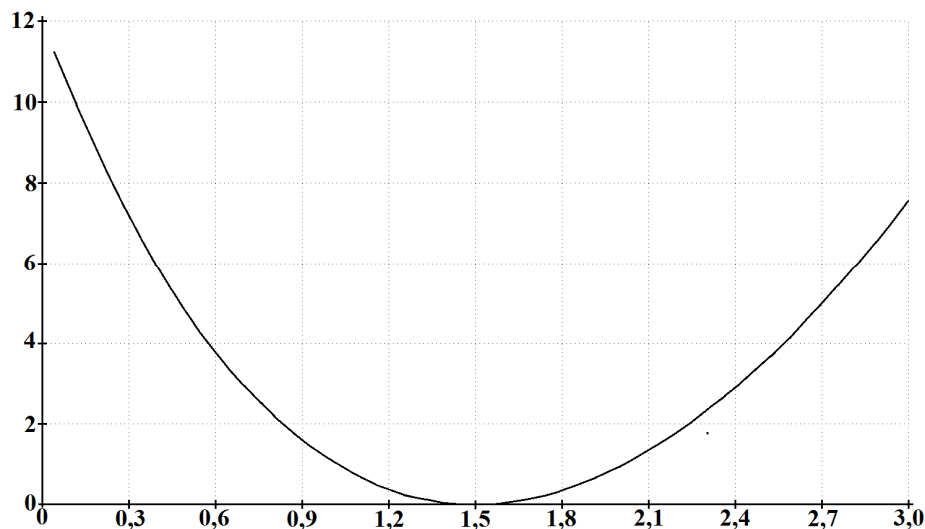


Рис. 2. Результат применения метода Монте-Карло: зависимость $J^S \cdot 10^{-6}$ от $\Gamma_S \cdot 10^3$

Список литературы

1. **Ипатов Д. Е.** Некоторые подходы к численному моделированию трехмерной нелинейной задачи гидротермодинамики // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2010. № 1 (32). Ч. 1. С. 14-16.
2. **Ипатова В. М.** Задача ассимиляции данных об определении коэффициентов и начального условия для трехмерной модели гидротермодинамики океана // Фундаментальные и прикладные проблемы современной математики. М.: МФТИ, 2010. С. 102-111.
3. **Открытие, экспериментальное исследование и разработка теории течения Ломоносова** / под ред. А. Г. Колесникова. Севастополь: Изд. МГИ, 1968.
4. **Федотов К. Н.** Тонкая термохалинная структура вод океана. Л.: Гидрометеиздат, 1976.
5. **Ipatova V. M.** Solvability of the Ocean Hydrothermodynamics Problem under a Nonlinear State Equation // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2008. V. 23. № 2. P. 185-196.

УДК 532.517.4:621:669

Игорь Евгеньевич Лобанов
Московский авиационный институт

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНТЕНСИФИЦИРОВАННОГО ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ В ТРУБАХ С ТУРБУЛИЗАТОРАМИ ДЛЯ ТЕПЛООБМЕННИКОВ СОВРЕМЕННОГО МЕТАЛЛУРГИЧЕСКОГО ПРОИЗВОДСТВА С ПРИМЕНЕНИЕМ ЧЕТЫРЁХСЛОЙНОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ[©]

Интенсификация теплообмена при турбулентном течении в прямых круглых трубах

В различных областях техники широко применяются различного рода теплообменники, в которых, в результате интенсификации теплообмена, может быть достигнуто снижение их массогабаритных показателей при заданных значениях теплового потока, гидравлических потерь, расходов и температур теплоносителей; в ряде случаев задачей является снижение температурного уровня поверхности теплообмена при фиксированных режимных и конструктивных характеристиках.

Расчётные методы исследования интенсификации теплообмена при турбулентном течении в трубах разработаны ещё недостаточно. Часто они опираются на упрощённые модели сложных физических явлений, при этом допущения приводят к значительной разнице между расчётными и экспериментальными данными.

Экспериментальные данные по теплообмену справедливы только для определённого вида течений и типоразмеров турбулизаторов, на которых были проведены опытные исследования.

В связи с этим необходима разработка новых, более точных, чем существующие теоретических методов исследования интенсификации теплообмена при турбулентном течении в трубах.

В рамках данного исследования под интенсификацией теплообмена понимаются применение искусственных турбулизаторов потока на поверхности, а также шероховатые поверхности (Рис. 1) [2; 9].

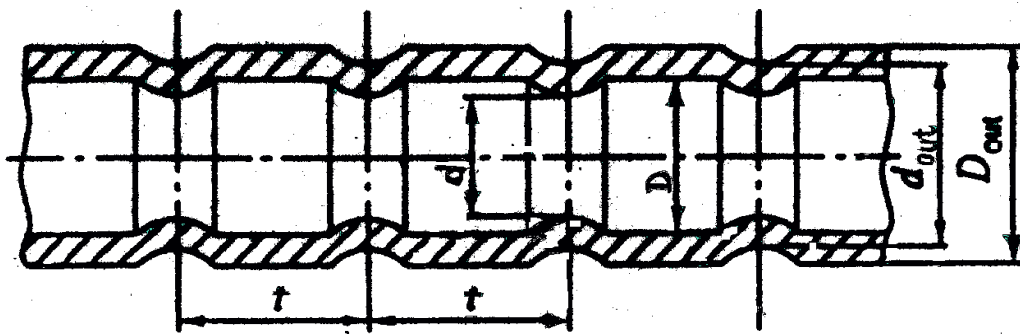


Рис. 1. Продольный разрез трубы с турбулизаторами

Модель предполагает двумерную шероховатость. Рассматриваются двумерные поверхности с турбулизаторами, которые применимы и для труб с периодическими диафрагмами.

Модель интенсификации теплообмена

Теплообмен при течении в каналах теплоносителей с постоянными теплофизическими свойствами в условиях интенсификации теплообмена моделируется четырёхслойной схемой турбулентного потока (Рис. 2).