

Терехович Владислав Эрикович

### **ОБОБЩЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПРИНЦИПОВ ФИЗИКИ**

В статье дается краткий исторический обзор основных экстремальных принципов классической механики, электродинамики, теории относительности и квантовой механики. Все принципы приводятся в общей математической форме с простыми формулировками, что позволяет сравнить их друг с другом и представить частным случаем квантового метода "интегралов по траекториям". Приводится обобщенная вероятностная формулировка экстремальных принципов физики.

Адрес статьи: [www.gramota.net/materials/1/2012/11/56.html](http://www.gramota.net/materials/1/2012/11/56.html)

Статья опубликована в авторской редакции и отражает точку зрения автора(ов) по рассматриваемому вопросу.

Источник

### **Альманах современной науки и образования**

Тамбов: Грамота, 2012. № 11 (66). С. 184-192. ISSN 1993-5552.

Адрес журнала: [www.gramota.net/editions/1.html](http://www.gramota.net/editions/1.html)

Содержание данного номера журнала: [www.gramota.net/materials/1/2012/11/](http://www.gramota.net/materials/1/2012/11/)

### **© Издательство "Грамота"**

Информация о возможности публикации статей в журнале размещена на Интернет сайте издательства: [www.gramota.net](http://www.gramota.net)

Вопросы, связанные с публикациями научных материалов, редакция просит направлять на адрес: [almanac@gramota.net](mailto:almanac@gramota.net)

УДК 53.02:531.3

**Физико-математические науки**

*В статье дается краткий исторический обзор основных экстремальных принципов классической механики, электродинамики, теории относительности и квантовой механики. Все принципы приводятся в общей математической форме с простыми формулировками, что позволяет сравнить их друг с другом и представить частным случаем квантового метода «интегралов по траекториям». Приводится обобщенная вероятностная формулировка экстремальных принципов физики.*

*Ключевые слова и фразы:* принцип наименьшего действия; принцип Гамильтона; интегралы по траекториям Фейнмана; обобщение физических законов.

**Владислав Эрикович Терехович**

Кафедра философии науки и техники

Философский факультет

Санкт-Петербургский государственный университет

v.terekhovich@gmail.com

**ОБОБЩЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПРИНЦИПОВ ФИЗИКИ<sup>©</sup>****Введение**

Экстремальные или вариационные принципы играют ключевую роль в большинстве разделов физики. Их можно свести к общей форме: действительное движение или состояние системы отличается от всех возможных при данных граничных условиях тем, что некий функционал, характеризующий систему в целом, стационарен и принимает экстремальное значение. Каждый экстремальный принцип имеет простую математическую форму, из которой выводятся уравнения движения или состояния системы. Функционалы в этих принципах имеют размерность «энергия  $\times$  время» и являются инвариантом относительно преобразований пространства-времени, благодаря чему выражают взаимосвязь принципов симметрии, сохранения и причинности [17, с. 169]. Экстремальные принципы переводят на язык математики философские понятия «возможность» и «действительность». Они используют описание физических процессов как через действующие, так и через целевые причины.

Возможно, по этим причинам экстремальные принципы не вписываются в философские основания доминирующих научных парадигм. Их не удается вывести из других принципов, иначе как приняв за аксиому ««предпочтение» природы развиваться экстремальными путями к экстремальным состояниям» [1, с. 210]. Ричард Фейнман обращал внимание, что по своей сути принцип наименьшего действия - принцип философский и изучаться может только путем философского обобщения [20]. Сегодня непостижимая эффективность вариационных принципов стала своеобразным символом веры физиков-теоретиков [5].

Уникальную эвристическую роль экстремальных принципов, особенно принципа наименьшего действия, в описании поведения физических систем отмечали М. Планк, Л. Де Бройль, Э. Шредингер, Д. Бом. Большая часть разделов курса «Теоретической физики» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица начинаются с этого принципа. В литературе по философскому анализу экстремальных принципов ключевое место занимают работы Л. С. Полака [3; 15], В. А. Ассеева [1] и О. С. Разумовского [16; 17]. Фейнман [19-22] и другие ученые [7; 23; 27; 35] излагали свое мнение о философском смысле этих принципов. Свою концепцию развивает В. Э. Терехович [18].

Общим недостатком существующей литературы является ее ограниченность практическим применением экстремальных принципов или их методологической ролью в отдельно взятой области физики. Видимую схожесть этих принципов авторы объясняют вычислительным удобством или разнообразными философскими аксиомами. Практически отсутствуют попытки за общей математической формой обнаружить единый физический смысл всех экстремальных принципов и ответить на ряд вопросов. Например, что объединяет различные экстремальные принципы, кроме их математической формы? Можно ли их привести к универсальному виду? В чем физический смысл возможных траекторий и перемещений? В чем физический смысл понятия «действие», и почему оно стремится к экстремальным значениям?

Для ответа на подобные вопросы основные экстремальные принципы физики необходимо привести к единой форме, что облегчит их сравнение. Для понимания физической связи между разными экстремальными принципами важно проследить историю их возникновения и ход рассуждений их создателей. Статья состоит из трех разделов, посвященных экстремальным принципам в классической механике, электродинамике, теории относительности и квантовой механике. В заключение все принципы приводятся к обобщенной вероятностной форме, основанной на методе «интегралов по траекториям» Р. Фейнмана.

**Экстремальные принципы в механике**

Леонард Эйлер упоминал о древнейших философах и последователях Аристотеля, установивших, что природа во всех своих проявлениях избирает кратчайший или легчайший путь [3, с. 99]. Герон Александрийский в

I веке до н.э. сформулировал принцип кратчайшего пути для случая отражения света. Пьер Ферма в 1662 году вывел принцип кратчайшего времени распространения света  $T$  между точками  $A$  и  $B$ , из которого выводятся все законы геометрической оптики (для однородной среды этот путь - прямая):

$$T = \min, \quad T = \int_A^B \frac{1}{V} ds, \quad \text{где } V - \text{ скорость распространения света, } ds - \text{ элемент пути света.}$$

Готфрид Лейбниц определил величину, которая может быть минимальной или максимальной в процессе движения и назвал его «действие» [Там же, с. 22], оно равно произведению массы, скорости и длины пути  $mv s$ , или массы, квадрата скорости и времени  $mv^2 t$ . Решение практических задач по нахождению пути, занимающему наименьшее время (И. Ньютон, И. Бернулли, Л. Эйлер, Ж. Лагранж), привело к возникновению вариационного исчисления. Его задачей является нахождение функции, удовлетворяющей условию стационарности некоторого функционала, то есть такой функции, бесконечно малые возмущения которой не вызывают изменения этого функционала в первом порядке малости. В большинстве случаев стационарное значение функционала совпадает с его локальным экстремумом (чаще всего минимумом, но иногда и максимумом) на линиях и поверхностях, который выражается через некоторые интегралы.

Например, для шарика, катящегося по дну небольшого прямого желобка, любое малое отклонение в сторону от дна желобка практически не изменяет его высоты  $h$ . Запись вариации  $\delta h = 0$  означает, что разность между действительным значением  $h$  и любым возможным  $h'$  в первом порядке приближения (малости) равна нулю. Это условие выполняется в случае, когда на всем протяжении пути шарика его высота в желобке будет минимальной или стационарной. Все вариационные принципы принято разделять на дифференциальные и интегральные. Первые рассматривают состояние системы в отдельные моменты времени и устанавливают, чем действительное движение системы отличается от кинематически возможных движений в каждый момент времени. Вторые рассматривают весь путь системы целиком между конкретными точками в пространстве или во времени и устанавливают, чем действительное движение системы отличается от кинематически возможных движений, совершаемых системой за конечный промежуток времени.

Пьер Мопертюи в 1744 году сформулировал принцип наименьшего действия, применимый, по его мнению, для всех случаев движения: «Когда в природе происходят некоторые изменения, количество Действия, необходимое для этого изменения, является наименьшим возможным» [Там же, с. 53]. Принцип Ферма для Мопертюи - частный случай нового принципа:

$$mv s = \min$$

Эйлер записал этот принцип в математической форме, из которой получил привычные уравнения механики. Он показал, что из всех возможных траекторий от точки  $A$  в точку  $B$ , описываемых телом под действием центральных сил за один и тот же промежуток времени, некий интеграл всегда равен максимуму или минимуму. Или на языке вариационного исчисления - при любом малом изменении траектории вариация действия  $S_0$  равна нулю. Данный принцип используется для нахождения реального времени пути системы в обобщенных координатах без учета того, как система перемещается по этой траектории:

$$S_0 = \min, \quad \delta S_0 = 0, \quad S_0 = \int_A^B mv ds, \quad \text{где } v - \text{ скорость, } m - \text{ масса, } ds - \text{ элемент траектории.}$$

Или в современных выражениях:

$$S_0 = \int_A^B pdq, \quad \text{где } p - \text{ импульс, } q - \text{ обобщенная координата.}$$

Новый принцип эквивалентен принципу статики, согласно которому система стремится к состоянию с минимумом потенциальной энергии. Жозеф Лагранж расширил принцип на произвольную систему взаимодействующих точек, поэтому его называют **принципом Мопертюи-Лагранжа**:

$$\sum m_i \int v_i ds_i = \min, \quad \delta \sum m_i \int v_i ds_i = 0$$

Лагранж сформулировал дифференциальный вариационный **принцип виртуальных скоростей**, известный еще как **принцип возможных перемещений** или **принцип виртуальной работы**, из которого можно вывести все теоремы статической механики. Согласно ему, действительное состояние равновесия любой механической системы с идеальными связями отличается от всех других возможных для нее состояний тем, что сумма элементарных работ всех действующих на неё активных сил, в т.ч. реакций связей, при любом возможном перемещении системы равна нулю:

$$\sum F_i \delta s_i = 0, \quad \text{где } F - \text{ активные силы, } \delta s - \text{ возможные перемещения.}$$

Используя идею Д'Аламбера о введении сил инерции, Лагранж получил обобщенный дифференциальный **принцип Д'Аламбера-Лагранжа**, из которого он в качестве следствия получил все теоремы динамики, статики и принцип наименьшего действия. Согласно новому принципу, действительное движение механической системы отличается от всех кинематически возможных тем, что только для него сумма элементарных работ всех активных сил, в т.ч. реакций связей и сил инерции на любом возможном перемещении системы в каждый момент времени равна нулю:

$$\sum (F_i + J_i) \delta s_i = 0, \quad J_i = -m_i w_i, \quad \text{где } J - \text{ силы инерции, } m - \text{ масса, } w - \text{ ускорение.}$$

Этот принцип является единственным постулатом аналитической механики, из которого следует не только условие равновесия, но и условие устойчивости системы - так называемая **теорема Лагранжа-**

**Дирихле**, согласно которой состояние равновесия механической системы характеризуется стационарностью потенциальной энергии:

$$\delta U = 0, \text{ где } U - \text{ потенциал.}$$

Для необратимых перемещений равновесие устойчиво, если потенциальная энергия имеет относительный минимум  $U = \min$ , что соответствует условию  $\delta U \geq 0$ , в то время как в общем случае для равновесия обратимых перемещений требуется не минимальность, а лишь стационарность  $U$  [11, с. 100-110].

В 1755 году Лагранж завершил работу Эйлера, связав принцип наименьшего действия с дифференциальным уравнением механики (оно так и называется - **уравнение Эйлера-Лагранжа**). Необходимым и достаточным условием стационарности интеграла

$$\int F(y, y', x) dx$$

является выполнение дифференциального уравнения [Там же, с. 83]:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Уильям Гамильтон в 1827 году пришел к выводу, что все закономерности геометрической оптики можно вывести из одного принципа, обобщающего принцип Ферма и принцип наименьшего действия. Используя формулы Эйлера и Лагранжа, Гамильтон находит для луча света характеристическую функцию  $l$  так, чтобы условие ее вариации давало реальную траекторию луча между точками  $A$  и  $B$ :

$$l = \min, \delta l = 0, l = \int_A^B v ds \text{ или } T = \min, \delta T = 0, T = \int_A^B dt, \text{ где } T - \text{ время.}$$

Такая форма согласовывалась как с волновыми (Гюйгенс), так и с корпускулярными (Ньютон) представлениями о природе света. В первом случае величину  $v$  можно рассматривать как преломляющую силу среды (показатель преломления), тогда  $l$  - это оптическая длина пути света, пропорциональная времени. Во втором случае  $v$  можно рассматривать как скорость частицы света (принцип наименьшего действия). Отсюда Гамильтон сделал вывод, что ни та, ни другая теория не дает истинного представления о сущности света [1, с. 36].

Будучи уверенным в аналогии оптических и механических явлений, Гамильтон в 1834 году применил новую форму принципа наименьшего действия к динамике, за что, кстати, был избран членом-корреспондентом Российской академии наук. Вместо интеграла по пути от количества движения  $mv$  Гамильтон вводит интеграл по времени от функции, обычно называемой «функцией Лагранжа» или «лагранжианом», такой чтобы условие вариации этого интеграла давало бы реальное движение системы из момента  $t_1$  в момент  $t_2$ :

$$S = \min, \delta S = 0, S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \text{ где } S - \text{ действие, } L - \text{ лагранжиан.}$$

Для консервативной системы (закон сохранения энергии выполняется) функция Лагранжа выражается как разность кинетической энергии и потенциальной энергии:  $L = T - U$ . Согласно **принципу Гамильтона**, из всех возможных виртуальных перемещений системы из одного состояния в другое за один и тот же промежуток времени действительным является то, для которого действие будет стационарным и локально наименьшим. Данная форма принципа используется для нахождения реального пути системы как функции времени. В отличие от формы Мопертюи, форма Гамильтона в общем случае не требует сохранения полной энергии системы и не рассматривает пространственные координаты, что позволяет применять ее не только к механическим системам. Принцип Гамильтона применим для так называемых голономных связей - налагающих ограничения только на положения (или перемещения за время движения) точек и тел системы, но не на величины их скоростей.

Михаил Васильевич Остроградский в 1848 году вывел принцип наименьшего действия без допущения Гамильтона о стационарности или голономности связей системы. Принцип работал и для неконсервативных систем, где закон сохранения энергии не имеет места. Поэтому обобщенный принцип наименьшего действия часто называют **принципом Гамильтона-Остроградского**, где лагранжиан выражается как:

$$L = \delta T + \sum F_i \delta s_i, \text{ где } T - \text{ кинетическая энергия, } F - \text{ активные силы.}$$

Карл Густав Якоби использовал понятие полной энергии системы  $E = T + U$  и нашел форму принципа наименьшего действия, связанную с геометрией обобщенного пространства, согласно которой действительное перемещение частицы является геодезической (кратчайшей) линией и отличается от всех возможных перемещений тем, что действие Якоби является стационарным и локально минимальным:

$$S_j = \min, \delta S_j = 0, S_j = \int_A^B \sqrt{2(F + E)} ds, \text{ где } F - \text{ силовая функция активных сил.}$$

По сути, это обобщение закона инерции Галилея, согласно которому под действием собственной инерции частица движется по прямой линии и с постоянной скоростью. Оказалось, что этот закон верен не только для трехмерного, но и для  $n$ -мерного искривленного риманова пространства [11, с. 167]. **Принцип Якоби** - механический аналог принципа Ферма в оптике, поскольку механические траектории консервативных систем могут быть получены с помощью построения ортогональных траекторий к поверхностям  $S = const$ . Это построение аналогично построению волнового фронта и световых лучей в геометрической оптике. Поверхности равного времени в оптике соответствуют поверхностям равного действия в механике, а принцип наименьшего времени Ферма - принципу наименьшего действия или принципу Якоби. И оптические, и механические явления могут быть описаны как с помощью волн, так и с помощью частиц [Там же, с. 314].

Карл Гаусс в 1829 году развил принцип Д'Аламбера так, чтобы он не был связан с минимальностью какой-либо функции системы, и сформулировал дифференциальный экстремальный **принцип наименьшего «принуждения»**. Вместо вариации по координатам, он проводит вариацию по ускорениям:

$$\sum (F_i + J_i) \delta w_i = 0$$

Затем Гаусс ввел величину  $Z$ , назвав ее «мерой принуждения», которая для действительного движения принимает наименьшее возможное значение из всех значений, совместимых с данными кинематическими связями» [7]. В результате он получил, что действительное движение системы материальных точек, связанных между собой и подверженных влияниям, в каждое мгновение отличается от возможных движений тем, что принуждение стационарно и имеет минимум:

$$Z = \min, \quad \delta Z = 0, \quad Z = \frac{1}{2} \sum m_i \left( \frac{F_i}{m_i} - w_i \right)^2$$

Физический смысл принципа Гаусса состоит в том, что система движется так, чтобы максимально сохранить свободу всех своих точек от влияния (принуждения) связей системы. Из принципа Гаусса следует, что точка будет двигаться вдоль пути с наименьшей кривизной. В отличие от принципа наименьшего действия, принцип Гаусса может использоваться при неголономных связях или непотенциальных силах [11, с. 134].

Ф. Журден в 1903 году предложил принцип, аналогичный принципам Д'Аламбера и Гаусса, но в котором варьируется не координата и не ускорение, а скорость. Согласно **принципа Журдена** из всех кинематически возможных движений механической системы с идеальными связями действительным является то, для которого в каждый момент времени выполняется условие:

$$\sum (F_i - m_i w_i) \delta v_i = 0$$

В 1893 году Генрих Герц на основе идей Якоби и Гаусса разработал дифференциальный экстремальный **принцип кратчайшего пути** или **принцип наименьшей кривизны**, сводя задачи механики к проблеме геодезических линий, тем самым геометризировав классическую динамику [3, с. 849]. Герц показал, что когда приложенные силы равны нулю, мера принуждения  $Z$  может быть интерпретирована как «геодезическая кривизна» траектории точки в трехмерном евклидовом пространстве. Действительная траектория отличается от всех возможных - совместимых со связями системы траекторий - тем, что ее кривизна имеет локальный минимум. Иначе говоря, точка при движении стремится уменьшить кривизну своей траектории в каждой точке до минимального значения, допускаемого связями [11, с. 134]. Из своего принципа Герц вывел принципы Мопертюи-Лагранжа, Гамильтона и Якоби. Для Герца естественным движением материальной системы является движение по кратчайшему пути с постоянной скоростью или по пути с наименьшей кривизной, что эквивалентно принципу Ферма. Эта идея нашла свое продолжение в общей теории относительности.

#### Экстремальные принципы в электродинамике и теории относительности

Поставив целью свести электродинамику Максвелла и электронную теорию к единым динамическим принципам, ряд ученых (Дж. Лармор, К. Шварцшильд, Г. Лоренц, Г. Ми) достигли этого, найдя соответствующее выражение для функции Лагранжа в принципе наименьшего действия [3, с. 587]. Вместо лагранжиана, интегрируемого по координате, использовалась плотность лагранжиана, интегрируемая по всему объему. Оказалось, что электростатическое поле (распределение потенциала  $\varphi$  в пространстве) легко описать не только при помощи дифференциальных уравнений, но и через требование стационарности и минимума действия поля  $S_f$ :

$$S_f = \min, \quad \delta S_f = 0, \quad S_f = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V (\nabla \varphi)^2 dV,$$

где  $\epsilon_0$  - диэлектрическая проницаемость,  $\rho$  - объемная плотность заряда.

Отсюда следует **принцип минимума полной энергии поля**, по которому «правильное поле и есть то единственное, которое из всех полей, получаемых как градиент потенциала, отличается наименьшей полной энергией» [21, с. 115]. Иначе говоря, объемный интеграл действия, равного полной энергии поля, для истинного распределения значений потенциалов поля имеет минимум, что аналогично теореме Лагранжа-Дирихле для механических систем. Если же в электростатическом поле движется заряд, то в соответствии с **принципом наименьшего действия для статического электрического поля** сумма действия поля и действия его взаимодействия с зарядом  $S_{mf}$  стационарна и имеет минимум:

$$S = \min, \quad \delta S = 0, \quad S = S_f + S_{mf}, \quad S = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V (\nabla \varphi)^2 dV - \int_V \rho \varphi dV$$

Для построения теории любого поля необходимо было учесть не только его статическую составляющую, но также вклад движущейся частицы и ее взаимодействия с полем. Причем сделать это необходимо с учетом уравнений теории относительности, т.е. в релятивистской форме. Сразу несколько физиков (Г. Лоренц, Д. Гильберт, А. Эйнштейн, А. Пуанкаре) выяснили, что для построения такой теории достаточно так сформулировать принцип наименьшего действия и выбрать для вариации такую функцию Лагранжа, чтобы они отвечали требованиям релятивистской инвариантности. Пуанкаре объединил интегрирование по пространству и времени и записал принцип Гамильтона в таком виде, из которого не только легко получаются уравнения Максвелла, но его можно применять для теоретического построения теории относительности [1, с. 71].

Для четырехмерного пространства-времени лагранжиан стали интегрировать не только по пространству, но и по времени. С релятивистской точки зрения действие Гамильтона имеет смысл произведения плотности материи и плотности поля на четырехмерный объем пространства-времени [3, с. 857].

Для нахождения уравнений электромагнитного поля функцию Лагранжа в принципе Гамильтона выразили через разность квадратов векторов напряженности электрического поля  $E$  и магнитного поля  $H$ . Магнитная энергия выступала аналогом кинетической, а электрическая - аналогом потенциальной энергии. Тогда действительное свободное электромагнитное поле (изменение распределения потенциалов в пространстве) отличается от всех возможных тем, что его действие  $S_f$  стационарно и имеет минимум:

$$S_f = \min, \quad \delta S_f = 0, \quad S_f = \frac{1}{8\pi} \int_V (E^2 - H^2) dV dt$$

То же условие можно записать в четырехмерной форме [10, с. 102]:

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c} \int_{\Omega} F_{ik} F^{ik} d\Omega, \quad d\Omega = c dt dV, \quad \text{где } F^{ik} - \text{тензор электромагнитного поля.}$$

В 1906 году Макс Планк записал **принцип наименьшего действия для релятивистского движения частицы в поле консервативной силы**, по которому действительная траектория заряженной частицы из одного состояния в другое за один и тот же промежуток времени отличается от всех возможных траекторий тем, что сумма действия частицы  $S_m$  и действия ее взаимодействия с полем  $S_{mf}$  стационарна и имеет минимум:

$$S = \min, \quad \delta S = 0, \quad S = S_m + S_{mf}, \quad S = \int [-mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - V] dt,$$

где  $m$  - масса покоя частицы,  $v$  - ее скорость,  $V$  - потенциал поля, зависящий от положения частицы.

Экстремальный **принцип для свободной релятивистской частицы** формулируется так: действительная траектория движения свободной частицы из состояния  $e_1$  в состояние  $e_2$  за один и тот же промежуток времени отличается от всех возможных траекторий тем, что ее действие  $S_m$  стационарно и имеет локальный минимум [Там же, с. 45]:

$$S_m = \min, \quad \delta S_m = 0, \quad S_m = -mc^2 \int_{e_1}^{e_2} d\tau = -mc \int_{e_1}^{e_2} ds = -mc^2 \int_{e_1}^{e_2} \sqrt{1 - v^2/c^2} dt,$$

где  $\tau$  - собственное время частицы,  $t$  - время системы отсчета,  $ds$  - элемент мировой линии,  $c$  - скорость света.

Если пренебречь релятивистским изменением массы частицы и поменять знак на противоположный, ее действие будет максимально:

$$S_m = \max, \quad S_m = \tau = \int_{e_1}^{e_2} d\tau$$

Последнее выражение имеет механические аналоги - принципы Герца и Гаусса, а также волновой аналог - принцип Ферма. Оно может быть интерпретировано как **принцип стационарности собственного времени** или **принцип максимального старения** [33], согласно которому действительная траектория свободной частицы отличается от всех возможных тем, что собственное время или скорость «старения» частицы стационарны, в данном случае - максимальны. При этом длина мировой линии минимальна. По словам Э. Тейлора, используя метрику и принцип максимального собственного времени, можно исследовать большие области общей теории относительности, в том числе звезды или черные дыры без тензоров или уравнений поля. Для низких скоростей и слабых гравитационных эффектов принцип максимального собственного времени упрощается до нерелятивистского принципа наименьшего количества действия, механика Ньютона, таким образом, становится частным случаем релятивистской механики [32].

Для траектории заряженной частицы в электромагнитном поле суммарное действие принимает вид:

$$S = \int_{e_1}^{e_2} \left( -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - \left[ q\phi - \frac{q}{c} vA \right] \right) dt,$$

где  $q$  - заряд,  $\phi$  - скалярный потенциал поля,  $A$  - векторный потенциал поля.

То же условие можно записать в четырехмерной форме, добавив действие поля  $S_f$  [10, с. 105]:

$$S = S_m + S_{mf} + S_f, \quad S = -\sum mc \int ds - \frac{1}{c^2} \int A_i j^i d\Omega - \frac{1}{16\pi c} \int F_{ik} F^{ik} d\Omega,$$

где  $A_i$  - 4-потенциал поля,  $j^i$  - 4-вектор плотности тока.

Уравнения гравитационного поля были практически одновременно выведены в 1915 году, 20 ноября Давидом Гильбертом из принципа наименьшего действия и 25 ноября Альбертом Эйнштейном из принципа общей ковариантности уравнений гравитационного поля. Работа Гильберта была опубликована позднее Эйнштейна, который затем посвятил отдельную статью выводу уравнений общей теории относительности из принципа Гамильтона [3, с. 599]. **Принцип наименьшего действия для гравитационного поля** можно сформулировать так: действительное гравитационное поле (распределение гравитационных потенциалов в пространстве) отличается от всех возможных тем, что сумма его действия  $S_g$  и действия материи  $S_m$  - массивных частиц и негравитационных полей - стационарна и имеет минимум:

$$S = \min, \quad \delta S = 0, \quad S = S_g + S_m, \quad S_g = -\frac{1}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d\Omega, \quad S_m = -\frac{1}{2c} \int T_{ik} g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega,$$

где  $G$  - гравитационная постоянная Ньютона,  $R$  - скалярная кривизна пространства-времени,  $g$  - определитель матрицы метрического тензора,  $T_{ik}$  - тензор энергии-импульса [10, с. 361-372].

Таким образом, от всех возможных четырехмерных пространств реально существующий мир отличается тем, что в любой его области действие принимает экстремальное значение [4, с. 522]. Позднее А. Эйнштейн,

Г. Вейль, А. Эддингтон и другие, опираясь на принцип Гамильтона, попытались создать единую теорию поля, однако не смогли достичь этого, в том числе потому, что не принимали во внимание вероятностный характер поведения квантовых микробиъектов [1, с. 73]. В этом преуспела квантовая механика.

В современной космологии принцип наименьшего действия стал использоваться для расчета движения систем, состоящих из  $N$  космических тел [25]. Зная современное распределение массы в расширяющейся Вселенной и используя принцип наименьшего действия, астрономы научились рассчитывать прошлые орбиты галактик [29].

#### Экстремальные принципы в квантовой механике

Макс Планк предположил, что действие, которое используется в принципе наименьшего действия - величина прерывная. Арнольд Зоммерфельд обратил внимание на то, что термин «квант действия» говорит о связи с понятием действия в принципе наименьшего действия так, что при каждом чисто молекулярном процессе каждая молекула воспринимает или отдает определенное универсальное количество действия [3, с. 779], а именно:

$$\int_0^{\tau} L dt = h/2\pi, \text{ где } h - \text{ постоянная Планка, } \tau - \text{ длительность процесса.}$$

В 1913 году Нильс Бор, используя понятие кванта действия, создает новую модель атома. Луи Де Бройль, опираясь на работы Гамильтона по оптико-механической аналогии и идентичность принципа наименьшего действия и принципа Ферма, объединяет понятия волн и квантов. Он приходит к выводу, что динамически возможные траектории движущегося тела совпадают с возможными лучами фазовой волны [Там же, с. 861]. Он предположил, что квант действия служит соединительным звеном между корпускулярным и волновым представлениями о материальных частицах [9, с. 135]. Эрвин Шредингер пришел к выводу, что если принцип Гамильтона рассматривать как принцип Ферма для распространения волн в конфигурационном пространстве [3, с. 691], то уравнение Гамильтона будет выражать принцип Гюйгенса для таких волн, а функция действия будет играть роль фазы волны. Гюйгенс в свое время объяснял распространение фронта волны, воображая, что каждая точка фронта испускает малую сферическую волну. Эти малые волны суммируются (интерferируют) и в дальнейшем воссоздают фронт основной волны, а все прочие колебания малых волн просто гасят друг друга.

Шредингер считал, что «лучи» или ортогональные траектории волновых поверхностей можно рассматривать как пути движения системы с энергией  $E$  в соответствии с уравнениями Гамильтона-Якоби [1, с. 89]. Воспользовавшись идеями Де Бройля, Шредингер получил свое волновое уравнение, вводя в макроскопическую физику понятия длины волны и амплитуды [3, с. 862]. Для этого Шредингер ввел некую абстрактную волновую функцию  $\psi$ , выразив ее через действие Гамильтона:

$$S = K \ln \psi, \text{ где } K - \text{ коэффициент с размерностью действия.}$$

Шредингер был уверен, что варьирование интеграла волновой функции позволит вывести уравнение квантовой механики. В результате он сформулировал вариационный принцип для волновой функции. Макс Борн позже предположил, что смысл уравнения Шредингера и его волновой функции состоит в том, что они определяют вероятность любого варианта хода событий в механическом процессе.

Следующим логичным шагом было объединить принцип Гамильтона и вероятностное описание квантовых событий. Но в определении лагранжиана, входящего в вариационные принципы обычного поля, возникает проблема. Дело в том, что состояние квантовой системы является суперпозицией множества состояний со своими значениями координат и импульсов, входящих в лагранжиан и не имеющих однозначной взаимной связи, поскольку они подчиняются соотношению неопределенности Гейзенберга. Эта проблема частично была решена в квантовой электродинамике, описывающей взаимодействие электромагнитного поля с электроном. Действительное движение электрона, точнее электронно-позитронной пары в электромагнитном поле из одного состояния в другое, отличается от всех возможных тем, что сумма действий частицы, поля и их взаимодействия стационарна и имеет минимум. Соответственно, плотность лагранжиана также состоит из трех слагаемых, относящихся к свободной частице  $L_m$ , электромагнитному полю (фотону)  $L_f$  и взаимодействию частицы и поля  $L_{mf}$ :

$$L = L_m + L_{mf} + L_f$$

Поль Дирак предложил каждую отдельную возможную эволюцию квантовой системы из одного состояния в другое описывать с помощью оператора, содержащего функцию, эквивалентную классическому действию и имеющую смысл фазы волны вероятности. Ричард Фейнман в 1940-х годах использовал идеи Гюйгенса и Дирака и предложил новый подход к квантовой физике. Он предположил, что квантовая частица одновременно движется по всем возможным траекториям, но волны вероятности гасятся в точке прибытия так, что максимальная вероятность падает на узкий пучок траекторий вокруг действительного пути, для которого вариация действия равна нулю. Для нахождения стационарной траектории системы из одного состояния в другое Фейнман предложил вместо варьирования вдоль единственной траектории суммировать вклады в полную амплитуду вероятности от всех возможных траекторий. Полученная таким образом максимальная амплитуда вероятности и даст действительную траекторию системы.

Фейнман сформулировал квантовомеханическое правило вычисления амплитуды вероятности. Необходимо установить, какой вклад вносит каждая траектория в полную амплитуду вероятности перехода системы из точки  $a$  в точку  $b$ . Важно, что вклад дают сразу все траектории, а не только та, которая соответствует

экстремальному действию. При этом вклады отдельных траекторий равны по величине, но различаются значением фазы. Таким образом, вероятность  $p$  перехода частицы из точки  $a$  в точку  $b$  равна квадрату модуля амплитуды вероятности этого перехода [22, с. 41]:

$$p(b, a) = |K(b, a)|^2, \text{ где } K - \text{ функционал, называемый пропагатором.}$$

Смысл пропагатора состоит в том, что он описывает волновую функцию в момент  $t_2$  через волновую функцию в момент  $t_1$  [Там же, с. 90]. Амплитуда вероятности представляет собой сумму вкладов (фаз) амплитуд вероятности от каждой траектории в отдельности, где суммирование выполняется по всем траекториям, соединяющим точки  $a$  и  $b$ :

$$K(b, a) = \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{возможным} \\ \text{переходам} \\ \text{из } a \text{ в } b}} \phi$$

Фаза каждой траектории пропорциональна действию  $S$  - тому же самому, что и в случае соответствующей классической системы, но выраженному в единицах кванта действия  $\hbar$ :

$$\phi = \text{const} \cdot e^{iS/\hbar}$$

В классическом пределе, когда величина действия много больше кванта действия  $S \gg \hbar$ , или длина волны частицы существенно меньше размеров самой частицы, достаточно учитывать только одну - классическую - траекторию с классическим действием, поскольку фазы всех остальных траекторий взаимно компенсируют друг друга [Там же, с. 43]. Результирующей траектории будет соответствовать максимальная вероятность. В результате интеграл по траекториям можно записать [Там же, с. 48]:

$$K(b, a) = \int_a^b e^{iS(x)/\hbar} Dx(t), \quad S(x) = \int_{t_1}^{t_2} L[x(t)] dt,$$

где  $D$  означает суммирование по всем возможным траекториям из  $a$  ( $t_1$ ) в  $b$  ( $t_2$ ), для каждой из которых величина действия имеет свое значение,  $S$  - действие для отдельной траектории.

Свой подход Фейнман применил к квантовому описанию как точечных частиц в обычном пространстве, так и полей в конфигурационном пространстве. Для расчета вероятности состояния (траектории) электрона в электромагнитном поле необходимо рассчитать амплитуды вероятности всех возможных состояний (траекторий) и просуммировать их фазы. Для этого необходимо использовать действия вещества  $S_m$ , поля  $S_f$  и взаимодействия вещества и поля  $S_{mf}$  [Там же, с. 285]. Полученное распределение вероятностей будет соответствовать действительному состоянию (траектории). Можно сказать, что чем выше вероятность состояния (траектории), тем ближе оно к наблюдаемому:

$$p \rightarrow \max, \quad p = |K|^2, \quad K = \int e^{i(S_m + S_{mf} + S_f)/\hbar} Dq DAD\phi,$$

где  $Dq$  означает суммирование по всем возможным траекториям, а  $DA$ ,  $D\phi$  - суммирование по всем возможным полям.

Данная формула является фундаментальным принципом квантовой электродинамики, но в случае, когда величина действия много больше постоянной Планка, а размеры частицы существенно больше ее длины волны, максимальная вероятность и минимальное действие соответствуют действительному классическому состоянию (траектории):

$$p = \max, \quad S = \min$$

Метод «интегралов по траекториям» эквивалентен волновому уравнению Шредингера, но в отличие от последнего физический смысл нового подхода интуитивно более понятен. На основе «интегралов по траекториям» в 1949 году была разработана техника «диаграмм Фейнмана», являющаяся на сегодня самым наглядным и эффективным способом описания взаимодействия в квантовой теории поля. Именно формулировка Фейнмана стала «незаменимой частью инструментария каждого физика, использующего квантовую теорию поля» [2, с. 403].

Сегодня принцип наименьшего действия используется в космологической теории струн. Если свободные частицы движутся вдоль геодезических линий в искривленном пространстве, то струна движется в пространстве вдоль мирового листа или по мировой трубе. Для расчета траектории движения струн минимизируется естественный аналог длины пути - площадь трубы, при этом используется тот же метод Фейнмана, что и для обычных частиц [8].

### Выводы

Среди ученых распространено мнение, что для экстремальных принципов не существует философских оснований, а сами принципы являются лишь удобным инструментом научного познания. Такого мнения придерживались Ж. Д'Аламбер, Ж. Лагранж, К. Якоби, М. Остроградский, Э. Мах, М. Борн, А. Эйнштейн, И. Пригожин. Современные физики считают, что эти принципы полностью эквивалентны дифференциальным принципам движения и не дают знания ничего нового [35]. А. И. Липкин пишет о принципе наименьшего действия лишь как о математической форме в рамках вариационного исчисления, о действии - как о математическом объекте, а о методе «интегралов по траекториям» - только как о другом математическом представлении уравнения Шредингера [12]. Искусственность постулатов фейнмановской интерпретации критикует Ю. С. Владимиров [6, с. 492]. М. Б. Менский, хотя и защищает многомировую интерпретацию квантовой механики, соглашается с тем, что квантовая система движется «одновременно» по всем возможным



путям [13, с. 173]. Ф. Дайсон утверждает, что материя в квантовой механике не есть инертная субстанция, но является активным агентом, постоянно делающим выбор между альтернативными возможностями согласно вероятностным законам [24, р. 5]. Р. Пенроуз, говоря об ожидаемых революционных изменениях во взглядах на онтологию квантовых явлений, указывает, что в них должно быть проявлено уважение к высокоорганизованной лагранжево-гамильтоново-геометрической структуре ньютоновской теории [14, с. 661]. Дж. Огборн и Э. Тейлор [30; 33] демонстрируют способ вывода механики Ньютона и общей теории относительности из «интегралов по траекториям» квантовой механики. М. Шарлов отстаивает реалистическую интерпретацию «интегралов по траекториям», где частицы действительно следуют по всем возможным траекториям, вносящим вклад в интеграл [31]. М. Валенте, как и Р. Фейнман, считает, что виртуальные частицы в диаграммах Фейнмана отражают реальные процессы взаимодействия частиц, которые, однако, не следует рассматривать как процессы в пространстве-времени [34]. В. Цурек обращает внимание на то, что уравнение Шредингера было выведено из классической механики в форме Гамильтона - Якоби, поэтому не является неожиданностью тот факт, что оно приводит к классическим уравнениям движения, когда  $\hbar$  может рассматриваться как малая величина [36].

На основании исторического обзора мы приходим к заключению, что все перечисленные экстремальные принципы могут быть получены друг через друга при разных допущениях, одни являются частными приближениями других. При этом экстремальные принципы одинаково эффективны для классических, релятивистских и квантовых объектов. Все экстремальные принципы можно привести к единой математической записи, в которой функционал  $S$  стационарен, принимает экстремальное значение и определяется как интеграл от некоего выражения  $L$  (лагранжиана) - функции состояния системы. В зависимости от типа изучаемого объекта интегрирование может проводиться по времени  $t$ , по пути  $s$ , по объему  $V$  или по четырехмерному пространству-времени  $\Omega$ :

$$S = \min (\max), \quad \delta S = 0, \quad S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad S = \int_A^B L ds, \quad S = \int_V L dV, \quad S = \int_{\Omega} L d\Omega$$

Моя гипотеза состоит в том, что связь экстремальных принципов друг с другом основана не столько на стремлении нашего рассудка сводить явления к простым моделям, а расчеты - к удобной форме, сколько на реальном единстве всех форм физического движения. Не обязательно ссылаться на стремление материи к экстремальным состояниям или к равновесию, достаточно смысл операции варьирования на макроскопическом уровне представить как частный случай операции интегрирования по всем возможным траекториям (состояниям) на уровне квантовом. Тогда процедура возведения в квадрат суммы амплитуд вероятностей всех траекторий (состояний) со своими действиями  $S_{\text{траект.}}$  будет символизировать переход с квантового на классический уровень. Минимумы и максимумы функционалов в разных экстремальных принципах становятся частным выражением максимума квантовой вероятности:

$$p = \max, \quad p = \left| \int_a^b e^{iS_{\text{траект.}}/\hbar} Dx \right|^2, \quad S_{\text{траект.}} = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

Тогда обобщенная вероятностная формулировка экстремальных принципов может иметь следующий вид - *действительное движение или состояние системы отличается от всех возможных при данных граничных условиях тем, что вероятность этого движения или состояния максимальна*. С точки зрения квантовой механики, физический смысл этого принципа означает, что объекты «перемещаются» (в  $n$ -мерном пространстве-времени) по всем возможным траекториям. Эти траектории интерферируют друг с другом. В результате в четырехмерном пространстве-времени действительной становится та траектория, квантовая вероятность которой максимальна, что проявляется в стационарности и экстремальности основных классических и релятивистских характеристик этой траектории.

#### Список литературы

1. **Ассеев В. А.** Экстремальные принципы в естествознании и их философское содержание. Л.: ЛГУ, 1977. 232 с.
2. **Вайнберг С.** Мечты об окончательной теории: физика в поисках самых фундаментальных законов природы. М.: Едиториал УРСС, 2004. 256 с.
3. **Вариационные принципы механики** / ред. Л. С. Полак. М.: Физматгиз, 1959.
4. **Вейль Г.** Гравитация и электричество // Эйнштейн и теория гравитации. М., 1979. 592 с.
5. **Визгин В. П.** Непостижимая эффективность аналитической механики в физике // *Философия физики: актуальные проблемы: материалы научной конференции (17-18 июня 2010 года)*. М.: ЛЕНАНД, 2010. 400 с.
6. **Владимиров Ю. С.** Метафизика. М.: БИНОМ, 2009.
7. **Голицын Г. А., Левич А. П.** Вариационные принципы в научном знании // *Философские науки*. 2004. № 1. С. 105-136.
8. **Гросс Д.** Грядущие революции в фундаментальной физике [Электронный ресурс]: интервью порталу «Элементы». URL: <http://elementy.ru/lib/430177> (дата обращения: 01.10.2012).
9. **Де Бройль Л.** Революция в физике. М.: Атомиздат, 1965. 234 с.
10. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория поля // Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: в 10-ти т. М.: Физматлит, 2003. Т. 2. 534 с.
11. **Ланцош К.** Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1965. 408 с.
12. **Липкин А. И.** Место понятий и принципов, «парящих над» отдельными разделами физики // *Актуальные вопросы современного естествознания*. 2010. Вып. 8. С. 51-58.
13. **Менский М. Б.** Человек и квантовый мир. Фрязино: Век-2, 2005. 320 с.
14. **Пенроуз Р.** Путь к реальности, или Законы, управляющие Вселенной. М. - Ижевск: ИКИ; НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 912 с.
15. **Полак Л. С.** Вариационные принципы механики, их развитие и применения в физике. М.: ЛИБРОКОМ, 2010. 600 с.

16. Разумовский О. С. От конкурирования к альтернативам: экстремальные принципы и проблема единства научного знания. Новосибирск: Наука, 1983. 225 с.
17. Разумовский О. С. Современный детерминизм и экстремальные принципы в физике. М.: Наука, 1975. 248 с.
18. Терехович В. Э. Интерференция возможностей, или Как «интегралы по траекториям» объясняют вероятностную причинность // Философия науки. Новосибирск: СО РАН, 2012. Т. 52. № 2. С. 108-120.
19. Фейнман Р. Характер физических законов / пер. с англ. М.: Наука, 1987. 160 с.
20. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. М.: Едиториал УРСС, 2004. Вып. 3. Излучения. Волны. Кванты. 240 с.
21. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. М.: Едиториал УРСС, 2004. Вып. 6. Электродинамика. 352 с.
22. Фейнман Р., Хибс А. Квантовые интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968. 384 с.
23. Цехмистро Л. Н. Эволюция и методологическое значение понятия действия в физике: дисс. ... канд. филос. наук: 09.00.08 / Харьковский инженерно-педагогический ин-т. Харьков, 1992.
24. Dyson F. Infinite in All Directions. N. Y., 1988.
25. Gialalisco M., Mancinelli B., Mancinelli P. J., Yahil A. // ApJ. 1993. 411.9.
26. Hanc J., Taylor E. F. From Conservation of Energy to the Principle of Least Action: a Story Line // Am. J. Phys. 2004. 72 (4). P. 514-521.
27. Katzav J. Dispositions and the Principle of Least Action // Analysis. 2004. 64 (3). P. 206-214.
28. Lemons D. S. Perfect Form: Variational Principle, Methods, and Applications in Elementary Physics. Princeton University Press, 1997.
29. Nusser A., Branchini E. On the Least Action Principle in Cosmology // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2000. 313. P. 587-595.
30. Ogborn J., Taylor E. F. Quantum Physics Explains Newton's Laws of Motion // Physics Education. 2005. № 40. Is. 1.
31. Sharlow M. The Quantum Mechanical Path Integral: toward a Realistic Interpretation [Электронный ресурс]. URL: <http://philsci-archive.pitt.edu/3780> (дата обращения: 01.10.2012).
32. Taylor E. F. A Call to Action // American Journal of Physics. 2003. Vol. 71. Is. 5.
33. Taylor E. F., Wheeler J. A. Spacetime Physics. New York, 1992.
34. Valente M. B. Are Virtual Quanta Nothing but Formal Tools? // International Studies in the Philosophy of Science. 2011. 25 (1). P. 39-53.
35. Yourgrau W., Mandelstam S. Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory. L., 2000.
36. Zurek W. H. Decoherence and the Transition from Quantum to Classical // Phys. Today. 1991. 44(10):36.

УДК 338

### Экономические науки

*В статье рассматривается история развития предпринимательства в г. Набережные Челны, начиная с XIX века. Большое значение имеет этап становления предпринимательства в советский период, когда предприниматели появились как особый класс. Особое внимание авторы акцентируют на особенностях развития предпринимательства в условиях моногорода, а также в сравнении со статистическими данными по Российской Федерации.*

*Ключевые слова и фразы:* предпринимательство; отрасли хозяйства; субъекты предпринимательства; малое и среднее предпринимательство; индивидуальное предпринимательство.

**Светлана Владимировна Титова**, к. пед. н.

*Кафедра менеджмента*

*Набережночелнинский филиал Института экономики, управления и права (г. Казань)*

*idun@yandex.ru*

**Дина Равилевна Матвеева**

*Кафедра экономики и менеджмента*

*Набережночелнинский филиал*

*Казанского национального исследовательского технического университета - КАИ*

*idun@yandex.ru*

### ТЕНДЕНЦИИ РАЗВИТИЯ ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВА В Г. НАБЕРЕЖНЫЕ ЧЕЛНЫ<sup>©</sup>

Предпринимательская деятельность в г. Набережные Челны начала свое развитие еще в XIX веке. Основным продуктом, который пользовался наибольшей популярностью среди купцов, был хлеб.

Рост масштабов хлебной торговли был связан с увеличением валового сбора хлебов и возрастанием товарности крестьянского хозяйства. В 1902 г. валовой сбор хлеба в Мензелинском уезде составлял 10,9 млн пудов, а в 1913 г. - 23,9 млн пудов. Были в первые полтора десятилетия и неурожайные годы (1901 г., 1906 г., 1911 г.), но это не ставит под сомнение общее увеличение производства сельскохозяйственной продукции. Значительная часть выращенного хлеба поступала на внутренний и внешний рынок. Если в конце XIX века количество хлебных грузов, отправлявшихся с Челнинской пристани, обычно не превышало 2 млн пуд. за навигацию, то в начале XX столетия наблюдается довольно резкое возрастание этого потока [1, с. 53].

В начале XX века пристань в Бережных Челнах окончательно превратилась в одну из крупнейших грузовых пристаней на Волге и Каме. По объему перерабатывавшихся хлебных грузов она намного превосходила