УДК 51-7:656
Физико-математические науки

Приводятся результаты исследований, оказавших существенное влияние на выбор структуры имитаторов, степени гибридности моделирования с учетом имеющихся ресурсов вычислительных систем, элементной базы и аппаратных средств на разных этапах разработки имитаторов движения. Даются оценки шага интегрирования в зависимости от параметров объекта управления. Осуществляется декомпозиция уравнений движения по параметрам характеристического уравнения, имеющая и самостоятельный интерес.

Ключевые слова и фразы: имитаторы движения; временное запаздывание; оценка влияния; приближенные методы; собственные частоты объекта.

Гарькина Ирина Александровна, д.т.н., доцент
Данилов Александр Максимович, д.т.н.
Пылайкин Сергей Александрович
Пензенский государственный университет архитектуры и строительства
fmatem@pguas.ru

ИМИТАТОРЫ ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ©

Предполагается, что движение транспортного средства описывается векторным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t),$$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ – векторы выходных координат и управляющих воздействий соответственно, $\mathbf{A},\mathbf{B}$ – матрицы размерности $n\times n$ и $m\times m$ соответственно.

Оценка влияния временного запаздывания. Пусть $\mathbf{u}(t)$ реализуется одним из способов:

$$\mathbf{u}(t)=\mathbf{P}\mathbf{x}(t);\ \mathbf{u}(t)=\mathbf{P}\mathbf{x}(t-\tau).$$

Сравним движения $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$, являющиеся решениями начальных задач:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}_1\mathbf{x}(t),\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0;$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{y}(t)+\mathbf{B}_1\mathbf{y}(t-\tau);\ \mathbf{y}(t-\tau)\equiv\mathbf{x}_0 \text{ при } t-\tau\le t_0;\ \mathbf{B_1}=\mathbf{BP},\quad \mathbf{A_1}=\mathbf{A}+\mathbf{BP}.$$

Справедливо:

$$\mathbf{x}_k-\mathbf{y}_k=\tau^2 k\mathbf{BP}(\mathbf{A}+\mathbf{BP})\mathbf{x}_0,$$

$t_k=t_0+k\tau;$ $\mathbf{x}_k \triangleq \mathbf{x}(t_k)$, $\mathbf{y}_k \triangleq \mathbf{y}(t_k)$, $k\ge 2$ ($\triangleq$ – равенство по определению).

Метод Эйлера с шагом интегрирования τ дает:

$$\mathbf{x}_k-\mathbf{y}_k=\tau^2\mathbf{BP}(k-1)(\mathbf{A}+\mathbf{BP})\mathbf{x}_0;$$

при шаге $\delta=\dfrac{\tau}{m}$ получим оценку:

$$\mathbf{x}_{m+j+1}-\mathbf{y}_{m+j+1}=\delta\left(\frac{m(m-1)}{2}+jm\right)\mathbf{BP}(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0);\ 1<j\le m-1.$$

Оценка требуемой длительности вычислительного цикла по параметрам объекта. Проиллюстрируем это на примере короткопериодической составляющей продольного движения.

Пусть $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$, где $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ – двумерная вектор-функция, $\mathbf{A}$ – квадратная матрица. В случае мнимых корней $-\dfrac{\tilde{\sigma}}{2}\pm i\omega=\dfrac{\sigma}{2}\pm i\omega$ $(\tilde{\sigma}\ge 0,\omega>0)$ характеристического уравнения $\mathbf{x}=e^{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}t}(\mathbf{p}\cos\omega t+\mathbf{q}\sin\omega t)$, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ – линейно независимые векторы.

Погрешность вычисления с шагом h для метода Рунге-Кутта второго порядка точности

$$\mathbf{r}_k=\mathbf{x}_k-\mathbf{x}(t_k)=\frac{-1}{24}h^2\ddot{\mathbf{f}}(\xi),\ \mathbf{f}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x},\ 0<\xi_k<t_k.$$

Так как $\mathbf{f}(t)=\dot{\mathbf{x}}$, то $\mathbf{r}_k=\dfrac{-1}{24}h^2\mathbf{f}(\xi_k)$, $0<\xi_k<t_k$.

Справедливо $\mathbf{p}=\mathbf{x}_0$, $\omega\mathbf{q}-\dfrac{\tilde{\sigma}}{2}\mathbf{p}=\mathbf{A}\mathbf{x}_0$;

$$|\dddot{\mathbf{x}}(t)|\le e^{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}t}\left(\frac{\tilde{\sigma}}{2}+\omega\right)^3(|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|);$$

$$\left|\mathbf{r}_k\right| \le \frac{h^2}{24} e^{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}\xi_k} \left(\frac{\tilde{\sigma}}{2}+\omega\right)^3 \left(|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|\right) \le \frac{h^2}{24}\left(\frac{\tilde{\sigma}}{2}+\omega\right)^3 \left(|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|\right).$$

Из условия $\left|\mathbf{r}_k\right| < \varepsilon$ следует

$$h^2 < \frac{24\varepsilon}{\left(|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|\right)\left(\dfrac{\tilde{\sigma}}{2}+\omega\right)^3} \text{ или } h^2 < \frac{\beta}{\left(\dfrac{\tilde{\sigma}}{2}+\omega\right)^3}, \quad \beta = \frac{24\varepsilon}{|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|}$$

(значение h должно выбираться с учетом собственной частоты и декремента затухания объекта).

Для рассматриваемых транспортных систем $2c^{-1} \le \omega \le 10c^{-1}$, $0,4 \le \xi \le 0,9$. *Увеличение ξ ведет к росту допустимой величины h*. Это объясняет стремление увеличить коэффициент демпфирования при достаточно больших реальных значениях h при настройке имитаторов транспортных средств. Однако это приводит к искажению характеристик объекта, ибо увеличение ξ вызывает соответствующее уменьшение собственной частоты ω. А это, в свою очередь, сдвигает точку (ξ,ω) в областях равных оценок управляемости объектом. Оценка оператором характеристик имитатора улучшается, а соответствие имитатора реальному объекту ухудшается. При $\xi = 0$ справедливо $h^2 < \dfrac{\beta}{\omega^3}$. Для системы с собственными частотами ω и $\Omega = k\omega$ отношение максимально допустимых шагов (оценка сверху) будет определяться в виде:

$$\frac{h_\Omega}{h_\omega} = \sqrt{\frac{\omega^3}{\Omega^3}} = \frac{1}{\sqrt{k^3}}$$

(в заданной полосе рабочих частот допустимый шаг интегрирования изменяется более чем в 10 раз).

Аналогичную оценку для шага h можно получить, исходя из условия $\left|\mathbf{R}_k\right| < \delta$; $\mathbf{R}_k = \dot{\mathbf{x}}_k - \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{r}}_k$.

В самом деле $\mathbf{R}_k = \dot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{Ar} = \mathbf{A}\left(-\dfrac{h^2}{24}\ddot{\mathbf{x}}(\xi_k)\right) = -\dfrac{h^2}{24}\mathbf{x}^{(4)}(\xi_k)$, $0 < \xi_k < t_k$,

$$\mathbf{x}^{(4)} = e^{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}t}\mathbf{p}\left(\left(\frac{\tilde{\sigma}^4}{16} - \frac{3}{2}\tilde{\sigma}^2\omega^2 + \omega^4\right)\cos\omega t + \left(\frac{\tilde{\sigma}^3\omega}{2} - 2\tilde{\sigma}\omega^2\right)\sin\omega t\right) +$$

$$+ e^{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}t}\mathbf{q}\left(\left(2\tilde{\sigma}\omega^3 - \frac{\tilde{\sigma}^3\omega}{2}\right)\cos\omega t + \left(\frac{\tilde{\sigma}^4}{16} - \frac{3}{2}\tilde{\sigma}^2\omega^2 + \omega^4\right)\sin\omega t\right).$$

Так как $\left|\mathbf{x}^{(4)}(t)\right| \le e^{\frac{\tilde{\sigma}}{2}t}\left(\dfrac{\bar{\sigma}}{2}+\omega\right)^4 \left(|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|\right)$, то

$$\left|\mathbf{R}_k\right| \le \frac{h^2}{24} e^{-\frac{\tilde{\sigma}}{2}\xi_k} \left(\frac{\tilde{\sigma}}{2}+\omega\right)^4 \left(|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|\right) \le \frac{h^2}{24}\left(\frac{\tilde{\sigma}}{2}+\omega\right)^4 \left(|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|\right).$$

Из условия $\left|\mathbf{R}_k\right| < \sigma$ получим

$$h^2 < \frac{24\delta}{\left(|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|\right)\cdot\left(\dfrac{\sigma}{2}+\omega\right)^4};\ h^2 < \frac{\gamma}{\left(\dfrac{\sigma}{2}+\omega\right)^4};\quad \gamma = \frac{24\delta}{|\mathbf{p}|+|\mathbf{q}|}.$$

Если $\delta = \varepsilon$, то $\gamma = \beta$.

Декомпозиция уравнений движения. Ограничимся системами четвертого порядка. При известных коэффициентах характеристического полинома задача сводится к определению корней уравнения

$$P_4(p) = p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

Справедливы приводимые ниже утверждения.

1. Для того чтобы движение содержало две *колебательных составляющих*, достаточно выполнения одного из следующих условий:

1.1. $a_0 > a_1$, $\quad a_2 > \dfrac{1}{4}\left(a_3^2 + a_1\right)$;

1.2. $a_0 < a_1$, $\quad a_2 > \max\left\{\dfrac{3}{8}a_3^2, \dfrac{1}{2}\left(a_1^3 + 3a_0^2 a_3\right)\right\}$;

1.3. $a_1 < \dfrac{3}{8}a_3^2$, $P_4(x_1) > 0$, $P_4(x_3) > 0$,

$x_1 > x_3$ – действительные корни многочлена $x^3 + 0,75a_3x^2 + 0,5a_2x + 0,25a_1$;

1.4. $a_2 \ge \dfrac{3}{8}a_3^2$, $P_4(x_1) > 0$, где x_1 – действительный корень многочлена $x^3+0,75a_3x^2+0,5a_2x+0,25a_1$.

2. Для *апериодичности* движения (все корни $P_4(x)$ – действительные) достаточно выполнения условий:

$$a_1<\frac{3}{8}a_3^2,\ \ P_4(x_1)\le 0, P_4(x_2)\ge 0, P_4(x_3)\le 0\ \ (x_i^3+0,75a_3x_i^2+0,5a_2x_i+0,25a_1=0,\quad i=\overline{1,3}).$$

3. Для того чтобы движение содержало лишь *одну колебательную* составляющую, достаточно выполнения условий:

$$a_1<\frac{3}{8}a_3^2,\quad P_4(x_2)<0 \text{ или } a_2\ge\frac{3}{8}a_3^2,\quad P_4(x_1)\le 0.$$

4. Приближенное условие устойчивости длиннопериодического движения $a_1a_2>a_0a_3$.

5. Справедливы приводимые ниже соотношения для определения корней многочлена $P_4(x)=x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ в зависимости от его коэффициентов.

5.1. Если $q=a_1-0,5a_2a_3+\frac{1}{8}a_3^3=0$ и $l=a_0-\frac{1}{4}a_1a_3+\frac{1}{16}a_2a_3^2-\frac{3}{256}a_3^4=0$ одновременно, то корни многочлена $P_4(x)$ есть

$$x_{1,2}=-\frac{a_3}{4},\quad x_{3,4}=-\frac{a_3}{4}\pm\sqrt{-p}\ ;\ p=a_2-\frac{3}{8}a_3^2.$$

5.2. Если $q\ne 0,\quad l=0$, то $x_1=-\frac{a_3}{4}, x_{2,3,4}=z_{2,3,4}-\frac{a_3}{4}$,

где $z_{2,3,4}$ – корни многочлена третьей степени x^3+pz+q.

5.3. Если $l\ne 0$, то $x_k=z_k-\frac{a_3}{4},\quad k=\overline{1,4}$,

$$z_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-b\pm\sqrt{b^2-4\gamma}\right),\quad z_{3,4}=b\pm\sqrt{b^2-4\frac{l}{\gamma}},\ \gamma=\frac{1}{2}\left(y_д-\sqrt{y_д^2-4l}\right),\quad b=-\frac{q\gamma}{\gamma^2-l},$$

$y_д$ – больший по модулю действительный корень многочлена $P_3(y)=y^3+py^2-4ly+\left(4pl-q^2\right)$.

6. При определении корней многочлена $P_3(x)=x^3+ax^2+bx+c$ можно воспользоваться приводимыми ниже утверждениями.

6.1. Если $s^2<\frac{4}{27}r^3$, $r=\frac{a^2}{3}-b,\quad s=\frac{ab}{3}-\frac{2a^3}{27}-c$, то для корней $P_3(x)$ справедливо:

$$x_k=\sqrt{r}\beta_k-\frac{a}{3},\quad k=\overline{1,3},$$

где $\beta_1=\frac{1}{3}\left(2+\sqrt{1+2,971\alpha_1}\right)$, $\beta_{2,3}=\frac{1}{3}\left(-\beta_1\pm\sqrt{4-3\beta_1^2}\right)$, $\alpha_1=\frac{s}{\sqrt{r^3}}$.

6.2. Если $s\ge\frac{4}{27}r^3$, то $x_k=\gamma_k-\frac{a}{3},\quad k=\overline{1,3}$,

$$\gamma_1=\sqrt[3]{\frac{s+\alpha_2}{2}}+\sqrt[3]{\frac{s-\alpha_2}{2}},\ \gamma_{2,3}=\frac{1}{2}\left(-\gamma_1\pm\sqrt{4r-3\gamma_1^2}\right),\ \alpha_2=\sqrt{s^2-\frac{4}{27}r^3}.$$

Полученные результаты использовались при разработке концепции и создании имитаторов транспортных систем, в том числе модульной архитектуры [1-3], с требуемыми характеристиками.

Список литературы

1. **Авиационные тренажеры модульной архитектуры**: монография / под ред. Э. В. Лапшина, д.т.н., проф. А. М. Данилова. Пенза: ИИЦ ПГУ, 2005. 146 с.
2. **Данилов А. М., Домке Э. Р., Гарькина И. А.** Формализация оценки оператором характеристик объекта управления // Известия ОрелГТУ. Информационные системы и технологии. 2012. № 2 (70). С. 5-11.
3. **Степанцов М. Е.** Моделирование динамики развития транспортных систем // Альманах современной науки и образования. Тамбов: Грамота, 2011. № 11. С. 68-70.